CCP Maths 2 PC 2002 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Aurélien Alvarez (ENS Lyon) ; il a été relu par Walter Appel (professeur en CPGE) et David Lecomte (ENS Cachan).

Ce sujet porte sur l'étude des polynômes de Legendre ; il se compose de quatre parties.

- Dans la première partie, on définit la suite des polynômes de Legendre pour s'intéresser notamment à la parité des différentes fonctions, ainsi qu'à leurs racines. On en déduit une équation différentielle linéaire homogène du deuxième ordre, dont la résolution fait l'objet de la dernière partie.
- La deuxième partie se consacre à l'étude d'une fonction réelle de deux variables. Après avoir étudié l'ensemble de définition, on admet un développement en série sur un sous-ensemble, pour ensuite obtenir diverses relations de récurrence entre les coefficients, et ainsi retrouver la même équation différentielle que précédemment. Cette partie se termine en établissant le lien qui existe entre les coefficients du développement en série et les fonctions polynomiales du début.
- On s'intéresse dans la troisième partie au développement en série de Fourier de fonctions réelles de deux variables. On s'interroge notamment sur l'égalité entre la fonction et la série de Fourier associée pour, dans un dernier temps, en déduire une égalité remarquable sur les polynômes de Legendre.
- Enfin, on cherche dans la dernière partie, qui pourra être traitée indépendamment des autres, des solutions développables en série entière au voisinage de 0 pour l'équation différentielle vérifiée par les polynômes de Legendre.

Ce problème aborde une grande partie des notions d'analyse développées au cours de l'année. Il ne présente pas de difficulté théorique majeure, mais demande d'effectuer un certain nombre de calculs avec soin.

Indications

Partie I

I.2 Utiliser la dérivation des fonctions composées (ici $x \longmapsto -x$).

I.3 S'intéresser à la parité.

I.4 On pourra dériver directement dans un premier temps puis dériver en considérant $\left(x^2-1\right)^{n+1}$ comme produit de $\left(x^2-1\right)$ par $\left(x^2-1\right)^n$. Utiliser également le théorème de Leibniz sur la dérivée n^{e} d'un produit de fonctions.

I.5 Penser à l'identité remarquable $\left(x^2-1\right) = (x-1)(x+1)$.

Partie II

II.1 On pourra étudier la courbe frontière d'équation $y = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{x}+x\right)$.

II.2 Penser à découper le plan en quatre parties pour étudier l'ensemble $\mathcal{E}$.

II.3 Chercher un autre développement en série de $f(x,0)$ pour calculer $\mathrm{A}_n(0)$. Pour ${\mathrm{A}_n}'(0)$, on pourra faire de même avec $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,0)$.

II.4.1 Après avoir calculé la quantité proposée à partir de la définition de f, refaire le calcul à partir de son développement en série.

II.4.2 On effectue la même démarche que précédemment.

II.4.3 On pourra également utiliser l'équation (**1**) obtenue à la question II.4.1.

II.4.4 Combiner les relations de récurrence (**1**) et (**3**) pour éliminer les termes indexés par $n-1$. Montrer l'égalité des coefficients A_n et P_n qui vérifient la même équation différentielle, en évoquant le théorème (d'existence) et d'unicité de Cauchy-Lipschitz.

Partie III

III.1 Faire un développement en série entière du membre de droite de l'égalité proposée puis évoquer le théorème de convergence normale pour en déduire les coefficients du développement en série de Fourier des fonctions C et S.

III.2 Exprimer F sous forme d'une fraction rationnelle en $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ que l'on décomposera en éléments simples afin de faire apparaître la quantité $\mathrm{C} + \mathrm{i}\,\mathrm{S}$.
Remarquer que $\mathrm{F} = \mathrm{C}^2 + \mathrm{S}^2$ et utiliser le produit de Cauchy.

III.3 Chercher le lien existant entre f (définie dans la partie II) et F, pour en déduire un deuxième développement en série entière de F. En utilisant le résultat final de la partie II, conclure à l'égalité demandée grâce à la question précédente.

Partie IV

IV.1 Dériver terme à terme la série entière sur le disque ouvert de convergence (à préciser par la suite) et écrire que z vérifie $(\mathbf{L}_{\boldsymbol{\lambda}})$, pour obtenir la relation demandée.

IV.2 Distinguer le cas où n est pair du cas impair. On obtient alors des expressions de α_n en fonction de α_0 et α_1 selon la parité.

IV.3 Vérifier a posteriori que les rayons de convergence des deux séries entières obtenues sont non nuls en utilisant le théorème de d'Alembert.

Partie I

I.1 Donnons une expression explicite des fonctions polynomiales $\mathrm{P}_0, \mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2, \mathrm{P}_3$. Un calcul simple montre que :

$$\boxed{\mathrm{P}_0(x) = 1}$$

De même
$$\boxed{\mathrm{P}_1(x) = x}$$

$$\mathrm{P}_2(x) = \frac{1}{8}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\left(x^4 - 2x^2 + 1\right) = \frac{1}{8}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(4x^3 - 4x\right)$$

et donc
$$\boxed{\mathrm{P}_2(x) = \frac{1}{2}\left(3x^2 - 1\right)}$$

$$\mathrm{P}_3(x) = \frac{1}{8 \times 6}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\left[3 \times 2x\left(x^2 - 1\right)^2\right] = \frac{1}{8}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(5x^4 - 6x^2 + 1\right)$$

d'où finalement
$$\boxed{\mathrm{P}_3(x) = \frac{1}{2}\left(5x^3 - 3x\right)}$$

> Lorsqu'on doit dériver une expression de la forme $\left(x^2 - 1\right)^n$, si l'entier n n'est pas trop grand, il est tout aussi commode de développer l'expression dans un premier temps, puis de dériver. En revanche, dès que $n \geqslant 3$, il est préférable de dériver directement l'expression en $n \times 2x\left(x^2 - 1\right)^{n-1}$ (dérivation des fonctions composées).

I.2 On remarque, en utilisant la question précédente, que les fonctions polynomiales P_0 et P_2 sont paires, alors que P_1 et P_3 sont impaires.

> La dérivée d'une fonction paire p (respectivement impaire q) est une fonction impaire (respectivement paire). En effet :
>
> $$\forall x \in \mathbb{R} \qquad p(x) = p(-x)$$
>
> et donc après dérivation
> $$p'(x) = -p'(-x)$$
>
> On a de même
> $$\forall x \in \mathbb{R} \qquad q(x) = -q(-x)$$
>
> et donc
> $$q'(x) = -\left(-q'(-x)\right) = q'(-x)$$

On en déduit donc immédiatement par récurrence que la dérivée n^{e} d'une fonction paire est une fonction paire (resp. impaire) si n est un entier pair (resp. impair). Or $x \longmapsto \left(x^2 - 1\right)^n$ est une fonction paire, et P_n en est la dérivée n^{e}, à une constante multiplicative près. Ainsi :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in \mathbb{R} \qquad \mathrm{P}_n(-x) = (-1)^n\,\mathrm{P}_n(x)}$$

I.3 D'après la question précédente, on a :

$$\mathrm{P}_n(-x) = (-1)^n\,\mathrm{P}_n(x)$$

donc en particulier $\qquad \forall n \in \mathbb{N} \qquad \mathrm{P}_n(0) = (-1)^n\,\mathrm{P}_n(0)$

$$\boxed{\text{Ainsi si } n \text{ est impair, alors } \mathrm{P}_n(0) = 0.}$$

On retrouve bien le fait qu'une fonction impaire s'annule en 0.

La fonction $x \longmapsto \left(x^2-1\right)^n$ est polynomiale de degré $2n$, et sa dérivée n^{e} est donc une fonction polynomiale de degré n. Or, on s'intéresse au terme constant (de degré 0) de ce polynôme (puisqu'on cherche à calculer la valeur prise par $\mathrm{P}_n(x)$ en 0). Le coefficient cherché provient précisément du terme de degré n du polynôme $\left(x^2-1\right)^n$.

D'après la formule du binôme de Newton, on a :

$$\left(x^2-1\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k}\,x^{2k} \qquad \text{où} \qquad \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

Dans le cas où n est pair, le coefficient de degré n est obtenu pour $k = \dfrac{n}{2}$ et vaut donc $\dbinom{n}{n/2}(-1)^{\frac{n}{2}}$. Or, la dérivée n^{e} de $x \longmapsto x^n$ est constante et vaut $n\,!$. On en déduit donc :

$$\mathrm{P}_n(0) = \frac{1}{2^n\,n!}\binom{n}{n/2}(-1)^{\frac{n}{2}} \times n!$$

c'est-à-dire $\qquad \boxed{\mathrm{P}_n(0) = \dfrac{(-1)^{\frac{n}{2}}}{2^n}\dbinom{n}{n/2} \quad \text{dans le cas } n \text{ pair.}}$

Intéressons-nous désormais à ${\mathrm{P}_n}'(0)$. Dans le cas où n est pair, P_n est une fonction paire, et par conséquent ${\mathrm{P}_n}'$ est une fonction impaire.

$$\boxed{\text{Ainsi } {\mathrm{P}_n}'(0) = 0 \text{ si } n \text{ est pair.}}$$

Dans le cas où n est impair, on raisonne comme précédemment. L'évaluation en 0 nous donne le terme constant du polynôme ${\mathrm{P}_n}'$: il faut donc s'intéresser au terme de degré 1 du polynôme P_n, c'est-à-dire au terme de degré $n+1$ du polynôme $\left(x^2-1\right)^n$. Le coefficient cherché est obtenu pour $k = \dfrac{n+1}{2}$ et vaut $\dbinom{n}{(n+1)/2}(-1)^{\frac{n-1}{2}}$. On en déduit donc que

$${\mathrm{P}_n}'(0) = \frac{1}{2^n\,n\,!}\binom{n}{(n+1)/2}(-1)^{\frac{n-1}{2}} \times (n+1)!$$

$$\boxed{{\mathrm{P}_n}'(0) = \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{2^n}\binom{n}{(n+1)/2}(n+1) \text{ dans le cas } n \text{ impair.}}$$

> On vérifie bien, grâce à la question I.1, que
>
> $$\mathrm{P}_0(0) = 1 \qquad \mathrm{P}_2(0) = \frac{-1}{2}$$
>
> et d'après un calcul immédiat que ${\mathrm{P}_1}'(0) = 1$ et ${\mathrm{P}_3}'(0) = \dfrac{-3}{2}$.