CCP Maths 1 PC 2002 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Walter Appel (professeur en CPGE) ; il a été relu par Thomas Chomette (ENS Ulm) et Éric Ricard (agrégé de mathématiques).

Ce sujet est relativement long mais les difficultés s'équilibrent d'une question à l'autre et nombreuses sont les questions intermédiaires qui jalonnent le chemin. Il traite des normes matricielles, c'est-à-dire des normes N sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ vérifiant $\mathrm{N}(\mathrm{AB}) \leqslant \mathrm{N}(\mathrm{A})\,\mathrm{N}(\mathrm{B})$ et, en particulier, des normes linéaires subordonnées à une norme sur $\mathbb{C}^n$.

Les parties sont indépendantes les unes des autres dans la mesure où tous les résultats ponctuellement nécessaires à la résolution d'une question sont donnés par l'énoncé. Le candidat gagnera donc à lire attentivement la totalité de l'énoncé avant de commencer à travailler.

- Dans une première partie, on établit par récurrence un résultat important (toute matrice sur $\mathbb{C}$ est trigonalisable) ainsi que quelques résultats utiles par la suite. On y utilise les outils standard de calcul matriciel et d'étude des suites numériques, ainsi que les résultats du cours sur les espaces vectoriels normés de dimension finie (équivalence des normes notamment).
- Dans la deuxième partie, on définit la notion de norme subordonnée, équivalent matriciel de la norme linéaire d'un endomorphisme ; on explicite la norme subordonnée à la « norme du sup » sur $\mathbb{C}^n$; on montre que les normes subordonnées sont des normes matricielles et enfin on les relie au rayon spectral d'une matrice. Là encore, les outils mis en œuvre sont tout à fait standard.
- Enfin, dans la troisième partie, on étudie quelques propriétés du rayon spectral d'une matrice à coefficients positifs. C'est la partie la plus originale du problème mais on y est guidé pas à pas, ce qui permet d'arriver sans trop de problèmes à un résultat non trivial.

Indications

Partie I

I.1.a Utiliser le théorème de d'Alembert-Gauss.

I.1.b Géométriser le problème.

I.2 Effectuer une récurrence sur n.

I.3.a Calculer le polynôme caractéristique et en déduire le spectre de G.

I.4 Comparer les polynômes caractéristiques de A et T.

I.6 Utiliser la question I.5.

I.7 Trouver un contre-exemple simple.

I.8 Utiliser une norme matricielle ϕ et l'équivalence entre N et ϕ.

I.9 Utiliser la question précédente et montrer que $\mathrm{N}\big(\mathrm{P}^{-1}(\mathrm{A}_k - \mathrm{A})\mathrm{P}\big)$ tend vers 0 quand k tend vers l'infini.

I.10.a Décomposer $\mathrm{T} = \lambda \mathrm{I}_2 + \mu \mathrm{J}$ avec $\mathrm{J}^2 = 0$ et utiliser le binôme de Newton.

Partie II

II.1.b Utiliser l'équivalence entre N et N_∞.

II.1.c Se servir de la question précédente.

II.3.b Calculer $\mathrm{N}(\lambda \mathrm{AY})/\mathrm{N}(\mathrm{Y})$. Si E est une partie de $\mathbb{R}$, se souvenir que pour tout élément y de E, $y \leqslant \sup \mathrm{E}$).

II.3.c Appliquer à $1/\lambda$ et à $(\lambda \mathrm{A})$ le résultat précédent.

II.3.e Séparer le cas $\mathrm{X} = 0$ des autres cas.

II.4.c Déterminer le spectre de A.

II.5 Utiliser les questions II.4.a et I.6.

II.6.c Montrer que A_ε^k tend vers 0_n quand k tend vers l'infini puis que, pour k suffisamment grand, $\widetilde{\mathrm{N}}(\mathrm{A}_\varepsilon^k) \leqslant 1$.

Partie III

III.2.b Effectuer une récurrence.

III.2.c Utiliser $\widetilde{\mathrm{N}_\infty}(\mathrm{A}) = \mathrm{M}_\mathrm{A}$ et le fait que l'on atteint le maximum définissant M_A pour un certain indice.

III.2.d Utiliser les questions III.2.b, III.2.c et II.6.d.

III.2.e Si $\mathrm{A} \neq 0_n$, poser $c = \max\big\{|a_{ij}/b_{ij}|\ ;\ (i,j) \in [\![\, 1\,;\, n \,]\!]^2\big\}$. Montrer que $\rho(\mathrm{B}) \neq 0$ (par exemple en considérant Tr B).

III.4 Remarquer que B satisfait les hypothèses de la question précédente. Montrer que $\rho(\mathrm{B}) = \alpha$ et $\rho(\mathrm{B}) \leqslant \rho(\mathrm{A})$.

III.5 Montrer $(\mathrm{AX})_i/x_i = \sum\limits_{j=1}^{n} (\mathrm{D}_x^{-1}\mathrm{AD}_x)_{ij}$ et utiliser $\rho(\mathrm{A}) = \rho(\mathrm{D}_x^{-1}\mathrm{AD}_x)$.

III.6 Utiliser la question précédente pour un vecteur propre $\mathrm{Y} > 0$. Passer à la borne supérieure ou inférieure. Grâce à Y, montrer que ces bornes sont atteintes.

Partie I

I.1.a Soit $\mathrm{M} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Alors, son polynôme caractéristique étant un polynôme sur $\mathbb{C}$, il admet au moins une racine (« théorème fondamental de l'algèbre », également appelé « théorème de d'Alembert », dont la démonstration complète est due à Gauss) et donc :

$$\boxed{\text{M admet au moins une valeur propre.}}$$

I.1.b

> Comme à chaque fois que l'on voit apparaître une matrice de la forme « $\mathrm{Q}^{-1}\mathrm{MQ}$ », on géométrise le problème.

On note ϕ l'endomorphisme de $\mathbb{C}^{n+1}$ dont la matrice représentative dans la base canonique est M. Puisque ϕ possède (au moins) la valeur propre λ, choisissons un vecteur propre x associé à cette valeur. La famille (x) étant libre ($x \neq 0$), on peut donc la compléter en une base $\mathcal{B}$. Alors la matrice représentative de ϕ dans $\mathcal{B}$ est de la forme $\begin{pmatrix} \lambda & \mathrm{L} \\ 0_{n,1} & \mathrm{N} \end{pmatrix}$, où L est une matrice ligne et N une matrice carré d'ordre n. En notant Q la matrice de passage de la base canonique à $\mathcal{B}$, on a

$$\boxed{\mathrm{Q}^{-1}\mathrm{MQ} = \begin{pmatrix} \lambda & \mathrm{L} \\ 0_{n,1} & \mathrm{N} \end{pmatrix}}$$

I.1.c Selon l'hypothèse posée au début de la question I.1, toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est trigonalisable. Notamment, N l'est. On peut donc trouver des matrices $\mathrm{H} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ et $\mathrm{S} \in \mathcal{T}_n(\mathbb{C})$ telles que $\mathrm{N} = \mathrm{HSH}^{-1}$. Il s'ensuit :

$$\boxed{\mathrm{Q}^{-1}\mathrm{MQ} = \begin{pmatrix} \lambda & \mathrm{L} \\ 0_{n,1} & \mathrm{HSH}^{-1} \end{pmatrix}}$$

I.1.d On reconnaît dans R une matrice diagonale par blocs. On vérifie alors simplement que $\begin{pmatrix} 1 & 0_{1,n} \\ 0_{n,1} & \mathrm{H}^{-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0_{1,n} \\ 0_{n,1} & \mathrm{H} \end{pmatrix} = \mathrm{I}_{n+1}$, ce qui montre que

$$\boxed{\text{R est inversible et } \mathrm{R}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0_{1,n} \\ 0_{n,1} & \mathrm{H}^{-1} \end{pmatrix}.}$$

I.1.e Enfin, en effectuant par blocs le produit $\mathrm{R}^{-1}(\mathrm{Q}^{-1}\mathrm{MQ})\mathrm{R}$, on obtient

$$\begin{aligned}
\mathrm{R}^{-1}\mathrm{Q}^{-1}\mathrm{MQR} &= \begin{pmatrix} 1 & 0_{1,n} \\ 0_{n,1} & \mathrm{H}^{-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda & \mathrm{L} \\ 0_{n,1} & \mathrm{HSH}^{-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0_{1,n} \\ 0_{n,1} & \mathrm{H} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \lambda & \mathrm{L} \\ 0_{n,1} & \mathrm{SH}^{-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0_{1,n} \\ 0_{n,1} & \mathrm{H} \end{pmatrix} \\
\mathrm{R}^{-1}\mathrm{Q}^{-1}\mathrm{MQR} &= \begin{pmatrix} \lambda & \mathrm{LH} \\ 0_{n,1} & \mathrm{S} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

ce qui est une matrice triangulaire, puisque S est triangulaire et que la matrice (λ), de taille 1×1, l'est aussi. Par conséquent,

$$\boxed{\text{M est trigonalisable.}}$$

I.2 Les résultats précédents permettent de montrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ la propriété $\mathcal{P}(n)$: « toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est trigonalisable ».

- $\underline{\mathcal{P}(1)}$: toute matrice d'ordre 1 est manifestement triangulaire.
- $\underline{\mathcal{P}(n) \Longrightarrow \mathcal{P}(n+1)}$: c'est l'objet des questions I.1.a à I.1.e.
- Conclusion : toute matrice à coefficients complexes est trigonalisable.

> On pourrait affiner ce résultat en montrant (c'est un résultat classique) que : toute matrice dont le polynôme caractéristique est scindé sur le corps $\mathbb{K}$, est trigonalisable sur $\mathbb{K}$. En effet, seule cette propriété a été utilisée pour effectuer la récurrence (à travers le théorème de d'Alembert-Gauss).

I.3.a On peut commencer par calculer le polynôme caractéristique $\mathrm{P_G}$ de G. On trouve, en développant sur la première ligne (qui contient un 0) :

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} 1-\mathrm{X} & 1 & 0 \\ 1 & -1-\mathrm{X} & 1 \\ 2 & -5 & 3-\mathrm{X} \end{vmatrix} &= (1-\mathrm{X})\big[(\mathrm{X}-3)(\mathrm{X}+1)+5\big] - (3-\mathrm{X}-2) \\
&= -\mathrm{X}^3 + 3\mathrm{X}^2 - 3\mathrm{X} + 1 \qquad \text{(1 est racine évidente)} \\
&= (\mathrm{X}-1)[-\mathrm{X}^2+2\mathrm{X}-1] = -(\mathrm{X}-1)^3
\end{aligned}$$

Ainsi, G ne possède qu'une unique valeur propre et $\mathrm{sp}\,(\mathrm{G}) = \{1\}$.

Supposons que G soit diagonalisable. Alors il existe une matrice inversible $\mathrm{P} \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{C})$ et une matrice diagonale D telles que $\mathrm{G} = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{DP}$. Or les éléments diagonaux de D sont les éléments du spectre, ce qui mène à $\mathrm{D} = \mathrm{I}_3$. On trouve alors $\mathrm{G} = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{I}_3\mathrm{P} = \mathrm{I}_3$; ce qui est manifestement faux.

Conclusion : $\boxed{\text{G n'est pas diagonalisable.}}$

I.3.b Déterminons les vecteurs propres de G associés à la valeur propre 1 et de la forme $\mathrm{Y} = \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$. L'équation $\mathrm{GY} = 1 \times \mathrm{Y}$ conduit au système

$$\left\{\begin{aligned} 1+\alpha &= 1 \\ 1-\alpha+\beta &= \alpha \\ 2-5\alpha+3\beta &= \beta \end{aligned}\right. \qquad \text{soit} \qquad \left\{\begin{aligned} \alpha &= 0 \\ \beta &= -1 \end{aligned}\right.$$

Il n'existe donc qu'un unique vecteur propre dont la première composante dans la base canonique est 1, et c'est le vecteur $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = e_1 - e_3$.

Il ne reste qu'à montrer que la famille (u, e_2, e_3) est une base de $\mathbb{C}^3$. Or, le déterminant dans la base canonique de la famille (u, e_2, e_3) vaut

$$\det_{\mathcal{B}}(u, e_2, e_3) = \det_{\mathcal{B}}(e_1 - e_3, e_2, e_3) = \det_{\mathcal{B}}(e_1, e_2, e_3) = 1$$