Mines Physique 2 MP 2002 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Stéphane Plat (Centrale Paris) ; il a été relu par Jean-Julien Fleck (ENS Ulm) et Stéphane Ravier (ENS Lyon).

L'épreuve se compose de deux problèmes indépendants et de longueurs inégales.

- Le premier problème, le plus long, étudie la trajectoire d'une particule chargée dans un champ électromagnétique. Il fait appel à des connaissances de mécanique du point et d'électromagnétisme. Dans la première partie, le champ est uniforme et constant ; dans la deuxième, il varie dans le temps, alors que dans la troisième, il varie dans l'espace. Ce problème est intéressant dans la mesure où il explore toutes les façons de déplacer une particule dans un champ magnétique. De ce fait, il constitue une excellente révision du chapitre correspondant.

- Le second problème étudie le fonctionnement d'une machine « perpétuelle ». Il nécessite des connaissances de mécanique. Avant de le commencer, il faut lire l'énoncé très attentivement pour bien comprendre le fonctionnement de la machine et les hypothèses du problème. Il ne faut pas hésiter à faire des dessins pour faciliter les calculs de moments.

Indications

Premier problème

1 Utiliser le principe fondamental de la dynamique. Sur le système couplé obtenu, appliquer la méthode de dérivation/substitution.

2 Écrire la définition du mouvement relatif de deux systèmes galiléens et son implication dans les accélérations.

4 Choisir un référentiel galiléen $\mathcal{R}$ tel que le champ électrique y soit nul. Pour vérifier le roulement sans glissement, il faut vérifier que ce référentiel parcourt sur une période la même distance par rapport à $\mathcal{S}$ que la particule dans $\mathcal{R}$.

6 Intégrer l'équation de Maxwell-Faraday à l'aide du thérorème de Stokes sur une surface bien choisie.

7 Utiliser la relation entre $\overrightarrow{\mathrm{E}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{A}}$.

8 Utiliser le repère de Frenet et projeter le principe fondamental de la dynamique sur un axe bien choisi (il ne faut surtout pas oublier $\overrightarrow{\mathrm{E}}$).

9 Même principe que pour la question précédente mais il faut choisir un autre axe, puis intégrer l'équation obtenue.

10 Revenir à la définition du moment magnétique puis se souvenir que $\mathrm{I} = \dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$.

12 Visiblement $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\ \overrightarrow{\mathrm{B}}$ n'est pas nul mais peut-être est-il négligeable... Introduire la distance caractéristique D et le temps caractéristique τ de variation de $\overrightarrow{\mathrm{B}}$ pour le montrer.

13 Utiliser le fait que, par définition, le flux le long d'un tube de champ est constant et en déduire B.

15 $\overrightarrow{\mathrm{B}_\theta}$ est nul par symétrie. Calculer F_z directement puis trouver une relation entre v_θ et r en s'inspirant de la question 8.

16 Appliquer le théorème de la puissance cinétique.

17 Montrer que les deux résultats ont la même origine physique à un changement de référentiel près.

19 Intégrer le principe fondamental de la dynamique démontré à la question 15.

20 Montrer que le flux du tube auquel appartient la particule, est constant.

Second problème

23 Comme tous les godets sont au fond, il y a invariance par symétrie pour tous les godets à partir d'une certaine profondeur.

31 Faire attention à l'erreur de signe dans le résultat proposé.

Premier problème
Particule dans un champ électromagnétique

I-1 Champ magnétique uniforme et constant

$\boxed{1}$ La particule est soumise à la seule force magnétique $\overrightarrow{\mathrm{F}} = q\,\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{\mathrm{B}}$. On applique le principe fondamental de la dynamique à la particule (dans le référentiel galiléen du problème et en choisissant le repère proposé par l'énoncé) :

$$m\,\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{v}}{\mathrm{d}t} = \overrightarrow{\mathrm{F}} = q\,\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{\mathrm{B}}$$

> Le poids est négligeable devant la force électromagnétique pour une particule chargée, c'est pour cela que l'on n'en a pas tenu compte dans l'écriture du principe fondamental de la dynamique.

$$\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{q\,\mathrm{B}}{m}\,(\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{u_z})$$

Or $$(v_x\,\overrightarrow{u_x} + v_y\,\overrightarrow{u_y} + v_z\,\overrightarrow{u_z}) \wedge \overrightarrow{u_z} = -v_x\,\overrightarrow{u_y} + v_y\,\overrightarrow{u_x}$$

Puis $$\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{v}}{\mathrm{d}t} = \omega_c\,(-v_x\,\overrightarrow{u_y} + v_y\,\overrightarrow{u_x})$$

En projetant $\overrightarrow{v}$ sur Oz, puis en intégrant, on obtient :

$$\ddot{z} = 0 \qquad \text{puis} \qquad \dot{z} = \mathrm{C^{te}} = v_{z_0}$$

donc $$z = z_0 + v_{z_0}\,t$$

En projetant $\overrightarrow{v}$ sur Ox et Oy, il vient :

$$\begin{cases} \dot{v}_x = \omega_\mathrm{c}\,v_y \\ \dot{v}_y = -\omega_\mathrm{c}\,v_x \end{cases}$$

En dérivant la première équation par rapport au temps et en utilisant la seconde, on obtient :

$$\ddot{v}_x = \omega_\mathrm{c}\,\dot{v}_y = -\,{\omega_\mathrm{c}}^2\,v_x$$

La solution de cette équation différentielle est de la forme :

$$v_x = \mathrm{A}\,\cos(\omega_\mathrm{c} t) + \mathrm{B}\,\sin(\omega_\mathrm{c} t)$$

On choisit l'axe Ox de telle sorte que $v_0 = v_{x_0}\,\overrightarrow{u_x} + v_{z_0}\,\overrightarrow{u_z}$. On a donc :

$$v_x(0) = v_{x_0} \qquad \text{et} \qquad \dot{v}_x(0) = \omega_\mathrm{c}\,v_{y_0} = 0$$

d'où $$v_x = v_{x_0}\,\cos(\omega_\mathrm{c} t)$$

Comme $v_y = \dfrac{\dot{v}_x}{\omega_\mathrm{c}}$, on a : $$v_y = -v_{x_0}\,\sin(\omega_\mathrm{c} t)$$

Puisque $\dot{x} = v_x$ et $\dot{y} = v_y$, en supposant que la particule est en $(0,\, v_{x0}/\omega_c,\, z_0)$ à $t = 0$, il vient finalement

$$\boxed{x = \frac{v_{x0}}{\omega_{\mathrm{c}}}\sin(\omega_{\mathrm{c}} t) \qquad y = \frac{v_{x0}}{\omega_{\mathrm{c}}}\cos(\omega_{\mathrm{c}} t) \qquad \text{et} \qquad z = z_0 + v_{z_0}\, t}$$

La particule décrit un mouvement hélicoïdal uniforme, d'axe Oz, de rayon R, de période T et de pas $\Delta\, z = z(t + \mathrm{T}) - z(t)$ caractérisés par :

$$\boxed{\mathrm{R} = \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{|v_{x0}|}{\omega_{\mathrm{c}}} \qquad \mathrm{T} = \frac{2\pi\,\mathrm{R}}{|v_{x0}|} = \frac{2\pi}{\omega_{\mathrm{c}}} \qquad \text{et} \qquad \Delta\, z = v_{z_0}\,\mathrm{T} = \frac{2\pi\, v_{z_0}}{\omega_{\mathrm{c}}}}$$

On pourrait résoudre le système d'équations différentielles couplées en passant par la notation complexe $\mathrm{Z} = x + i\, y$. Le système d'équations différentielles s'écrit alors :

$$\ddot{\mathrm{Z}} = -i\,\omega_{\mathrm{c}}\,\dot{\mathrm{Z}} \qquad \text{avec} \quad \dot{\mathrm{Z}}\,(0) = v_{x0} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Z}(0) = i\,\frac{v_{x0}}{\omega_c}$$

On obtient après intégration,

$$\mathrm{Z}(t) = -\frac{v_{x0}}{i\,\omega_{\mathrm{c}}}\,\exp\left(-i\,\omega_{\mathrm{c}} t\right) = \frac{v_{x0}}{\omega_{\mathrm{c}}}\,\left(\sin(\omega_{\mathrm{c}} t) + i\,\cos(\omega_{\mathrm{c}} t)\right)$$

On retrouve bien le même résultat.

On pourrait aussi considérer que le mouvement est la composée d'un déplacement à la vitesse v_{z_0} et d'un mouvement caractérisé par la vitesse $v_{x0}\,\overrightarrow{u_x}$ qui est orthogonale à $\overrightarrow{\mathrm{B}}$ à l'instant initial. On montre alors que le mouvement est la composée d'une translation rectiligne uniforme à la vitesse v_z et d'un mouvement circulaire uniforme (on retrouve le rayon à l'aide de la projection dans le repère de Frenet).

En tout point de l'hélice, l'inclinaison α de la trajectoire par rapport à Oz reste constante :

$$\cos\alpha = \frac{v_{z0}}{v_0}$$

2 Soient deux référentiels galiléens $\mathcal{R}_1$ et $\mathcal{R}_2$. Ils sont par définition en translation rectiligne l'un par rapport à l'autre :

$$\overrightarrow{v_1} = \overrightarrow{v_2} + \overrightarrow{v_0} \qquad\qquad \text{(avec } \overrightarrow{v_0} \text{ vecteur constant)}$$

Comme la dérivée temporelle de $\overrightarrow{v_0}$ est nulle, on en déduit l'égalité des accélérations dans les deux référentiels :

$$\overrightarrow{a_1} = \overrightarrow{a_2}$$

On écrit le principe fondamental de la dynamique dans les deux référentiels en notant $\overrightarrow{\mathrm{F}_1}$ et $\overrightarrow{\mathrm{F}_2}$ les forces dans chaque référentiel. Il vient :

$$\boxed{\overrightarrow{\mathrm{F}_1} = m\,\overrightarrow{a_1} = m\,\overrightarrow{a_2} = \overrightarrow{\mathrm{F}_2}}$$

La résultante $\overrightarrow{\mathrm{F}}$ des forces subies par la particule en M est donc indépendante du référentiel galiléen d'étude que l'on choisit.