X Maths 2 MP 2002 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par David Lecomte (ENS Cachan) ; il a été relu par Tristan Poullaouec (agrégé de mathématiques) et Benoît Chevalier (ENS Ulm).

On étudie dans ce problème un endomorphisme T d'un espace euclidien E, qui généralise la notion de projection orthogonale sur un sous-espace. Le sujet se compose de quatre parties.

- Au cours des deux premières, on étudie les premières propriétés de T : on montre qu'il est auto-adjoint et défini positif, puis on l'étudie dans certains cas particuliers.
- La troisième partie nous donne un algorithme de résolution de l'équation $\mathrm{T}x = y$ par itérations.
- La quatrième partie généralise la troisième, dans le cas où E est seulement préhilbertien réel.

En fait, dans la troisième partie, on oublie complètement la définition précise de T et l'on utilise uniquement le fait qu'il est auto-adjoint défini positif. Elle peut donc être traitée indépendamment des deux premières.

De même, la quatrième partie nous place dans un autre cadre puisque l'espace E n'est plus de dimension finie. On peut donc la résoudre à part. Néanmoins, les techniques utilisées ressemblent énormément à celles de la troisième partie et il est souhaitable d'avoir bien compris cette dernière.

Ce problème, de difficulté moyenne, est intéressant et demande une bonne maîtrise des espaces euclidiens et des propriétés des endomorphismes auto-adjoints.

Indications

Première partie

1 Considérer la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

2 Montrer que $\big(\text{Vect}\,(e_1,\ldots,e_m)\big)^\perp$ est réduit à $\{0\}$ en utilisant la relation (**1**).

4 Utiliser les propriétés de bilinéarité et de symétrie du produit scalaire pour obtenir

$$\forall (x,y)\in \mathrm{E}^2 \qquad \big(\mathrm{T}x\,\big|\,y\big) = \sum_{j=1}^{m}(x\,|\,e_j)(y\,|\,e_j)$$

et en déduire que T est auto-adjoint. Puis utiliser cette relation avec $y = x$ pour obtenir l'inégalité demandée. Utiliser enfin cette dernière pour montrer que T est injectif. Conclure qu'il est bijectif.

5 Diagonaliser T dans une base orthonormée. Montrer que $||\mathrm{T}||$ est égal à la plus grande valeur propre de T et qu'il en est de même de $\text{Sup}\left\{\big(\mathrm{T}x\,\big|\,x\big)\ :\ ||x|| = 1\right\}$.

6 Après avoir diagonalisé T dans une base orthonormée, calculer T^{-1}. En déduire que $\dfrac{1}{\lambda_n}$ constitue un β convenable, où λ_n est la plus petite valeur propre de T. Montrer que $\big|\big|\mathrm{T}^{-1}\big|\big|$ est égal à $\dfrac{1}{\lambda_n}$.

7 Montrer que T est l'homothétie de rapport α.

Deuxième partie

9 Utiliser le fait que T^{-1} est auto-adjoint pour montrer que

$$\widetilde{\Phi} = \Phi\circ \mathrm{T}^{-1}$$

En déduire que $\text{Im}\,\widetilde{\Phi} = \text{Im}\,\Phi$ pour conclure.

10 Remarquer que l'ensemble

$$\mathrm{A} = \left\{\ \sum_{j=1}^{m} {h_j}^2\ :\ x = \sum_{j=1}^{m} h_j e_j\right\}$$

est égal à $\big\{||h||^2\ :\ h\in\Psi^{-1}\big(\{x\}\big)\big\}$.

Montrer ensuite que $\Psi^{-1}\big(\{x\}\big)$ est le sous-espace affine de F parallèle à $\text{Ker}\,\Psi$ et passant par n'importe quel h tel que $\Psi h = x$. En déduire que $\text{Inf}\,\mathrm{A}$ n'est autre que la distance de 0_{F} à $\Psi^{-1}\big(\{x\}\big)$, c'est-à-dire la norme de la projection orthogonale de 0_{F} sur $\Psi^{-1}\big(\{x\}\big)$.

Vérifier que $h_0 = \big(\Phi\circ\mathrm{T}^{-1}\big)x$ appartient à ce sous-espace affine et se trouve être cette projection orthogonale.

Troisième partie

12 Utiliser le raisonnement de la question 5 pour montrer que $||\mathrm{V}_s||$ est la racine carrée de la plus grande valeur propre de ${\mathrm{V}_s}^*\mathrm{V}_s$, qui n'est autre que ${\mathrm{V}_s}^2$ car V_s est autodajoint. Remarquer aussi, après avoir diagonalisé T dans une base orthonormée, que a et b sont respectivement la plus petite et la plus grande valeur propre de T. En déduire que

$$||\mathrm{V}_s|| = \sqrt{\mathrm{Max}\left\{1 - \lambda s \ : \ \lambda \in \mathrm{Sp}\,\mathrm{T}\right\}}$$

Étudier enfin la fonction $t \longmapsto (1-ts)^2$ pour conclure.

13 Comme le suggère l'énoncé, tracer les courbes représentatives de

$$f_a : s \longmapsto |1 - as| \qquad \text{et} \qquad f_b : s \longmapsto |1 - bs|$$

en gardant à l'esprit que $0 < a \leqslant b$. En déduire la courbe représentative de $s \longmapsto ||\mathrm{V}_s||$ et identifier le minimum de cette fonction.

14 Établir que

$$||\mathrm{U}x - \mathrm{U}x'|| \leqslant \mathrm{C}||x - x'||$$

15 D'après les questions 13 et 14, U est contractante. Utiliser alors le théorème de point fixe de Picard (pas les surgelés, un autre) :

« *Soit* E *un espace de Banach et soit f une application contractante de* E *dans lui-même. Alors f admet un unique point fixe et pour tout x_0 dans* E*, la suite $\big(f^n(x_0)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ce point fixe.* »

pour en déduire que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers le point fixe x de U. Vérifier que x est solution de l'équation $\mathrm{T}x = y$.

Quatrième partie

16.a Calculer $\big|\big|(\mathrm{Id}_\mathrm{E} - s\mathrm{T})u\big|\big|^2$ pour tout u de norme 1 dans E, à l'aide des propriétés de bilinéarité et de symétrie du produit scalaire. En déduire que si

$$\mathrm{Inf}\left\{\big(\mathrm{T}x \,\big|\, x\big) \ : \ ||u|| = 1\right\}$$

est strictement positif, on obtient l'inégalité demandée avec

$$a = \mathrm{Inf}\left\{\big(\mathrm{T}x \,\big|\, x\big) \ : \ ||u|| = 1\right\} \qquad \text{et} \qquad b = ||\mathrm{T}||$$

16.b Montrer que le minimum s_0 de la fonction $s \longmapsto 1 - as + b^2 s^2$ est dans $]0,1[$. En déduire que U_s est contractante. Trouver enfin la condition manquante sur E pour pouvoir appliquer le théorème de Picard.

En déduire que T est surjective. Puis utiliser le fait que l'on a supposé a strictement positif pour obtenir l'injectivité de T.

Première partie

1 Toute base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ vérifie une condition de la forme (**1**), avec $\alpha = 1$. En effet, si $(e_j)_{1\leqslant i\leqslant n}$ est une telle base, on sait que

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \qquad x = \sum_{j=1}^{n} (x \mid e_j)\, e_j$$

Par suite, en appliquant le théorème de Pythagore,

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \qquad ||x||^2 = \sum_{j=1}^{n} (x \mid e_j)^2$$

En particulier, la base canonique de $\mathbb{R}^n$ est orthonormée.

$$\boxed{\text{La base canonique de } \mathbb{R}^n \text{ vérifie une condition de la forme } (\mathbf{1}).}$$

> Sur le même modèle, on peut construire aisément, pour tout α strictement positif et pour tout entier m supérieur à n, une famille $(e_j)_{1\leqslant j\leqslant m}$ satisfaisant la condition (**1**).
>
> Partons de la base canonique de $\mathbb{R}^n$, notée $(u_j)_{1\leqslant j\leqslant n}$ et posons :
>
> $$\forall j \in \{1\ldots n\} \qquad e_j = \sqrt{\alpha}\, u_j$$
>
> Alors $$\forall x \in \mathbb{R}^n \qquad ||x||^2 = \sum_{j=1}^{n} (x \mid u_j)^2 = \frac{1}{\alpha}\sum_{j=1}^{n} (x \mid e_j)^2$$
>
> et $$\forall x \in \mathbb{R}^n \qquad \alpha||x||^2 = \sum_{j=1}^{n} (x \mid e_j)^2$$
>
> Puis il suffit d'ajouter $n-m+1$ vecteurs quelconques $(e_j)_{n+1\leqslant j\leqslant m}$ de l'espace pour obtenir
>
> $$\forall x \in \mathbb{R}^n \qquad \sum_{j=1}^{m} (x \mid e_j)^2 = \underbrace{\sum_{j=1}^{n} (x \mid e_j)^2}_{=\alpha||x||^2} + \underbrace{\sum_{j=n+1}^{m} (x \mid e_j)^2}_{\geqslant 0} \geqslant \alpha||x||^2$$

2 Notons V le sous-espace vectoriel engendré par la famille $(e_j)_{1\leqslant j\leqslant m}$ et montrons que son orthogonal est réduit à $\{0\}$.

Soit x dans l'orthogonal de V. Alors x est orthogonal, en particulier, à tous les vecteurs de la famille $(e_j)_{1\leqslant j\leqslant m}$ et l'on a

$$\alpha||x||^2 \leqslant \sum_{j=1}^{m} \underbrace{(x \mid e_j)^2}_{=0} = 0$$

Comme α n'est pas nul, il vient

$$||x|| = 0 \qquad \text{donc} \qquad x = 0$$

L'orthogonal de V est donc bien réduit à $\{0\}$. Comme V est égal à son double orthogonal, on a

$$\boxed{\mathrm{V} = \mathrm{Vect}\,(e_1, \ldots, e_m) = \mathrm{E}}$$