X Maths 1 MP 2002 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Jean Starynkévitch (ENS Cachan) ; il a été relu par Walter Appel (professeur en CPGE) et Thomas Chomette (ENS Ulm).

Ce problème d'analyse porte principalement sur l'étude de l'application

$$\Delta\colon \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \displaystyle\int_0^1 |f(t)-x|\,\mathrm{d}t \end{cases}$$

où f est une application donnée sur $]\,0\,;1\,[$, continue par morceaux, monotone par morceaux et intégrable.

- La première partie propose une introduction au thème par l'étude de l'application $x \longmapsto \displaystyle\int_0^1 (f(t)-x)^2\,\mathrm{d}t$, précédée de l'analogue discret.
- La deuxième partie établit quelques premières propriétés de l'application Δ et propose ensuite l'étude de deux exemples concrets. Il s'agit essentiellement d'analyse réelle.
- La troisième partie établit une correspondance entre Δ et une application λ définie sur les intervalles de $\mathbb{R}$, portant le nom de mesure de probabilité ; elle s'achève en proposant une caractérisation de l'ensemble des points où Δ est minimale. Cette partie est originale et assez difficile. De plus, elle nécessite d'être parfaitement au point sur les fonctions convexes.
- Enfin, la quatrième partie précise où se situe (en fonction de f) le minimum de Δ ; on y montre que si f est continue, ce minimum est atteint en un unique point, et on situe ce point vis-à-vis de la norme $\|f\|_1$. Cette partie est légèrement plus classique que la précédente, mais reste difficile.

Comme d'habitude à ce concours, le problème est assez déroutant. Il faut notamment utiliser l'inégalité triangulaire sous toutes ses formes sans la moindre hésitation et savoir jongler avec les reformulations d'une même question pour arriver aux solutions. Hormis une utilisation non évidente du théorème de convergence monotone, les outils mathématiques utilisés sont assez simples (séries numériques, intégration sur un intervalle, manipulations ensemblistes).

Indications

Signalons d'abord quelques liens entre les questions :

- Les questions 1 et 2 sont indépendantes du reste du problème.
- Les questions de la deuxième partie sont liées les unes aux autres de façon naturelle. En revanche, les résultats nécessaires pour répondre aux dernières questions sont écrits dans l'énoncé.
- Les questions 7 et 8 sont indépendantes de la deuxième partie ; ce n'est pas le cas des questions 9 et 10 ; de plus, dans ces deux questions, les résultats demandés ne sont pas donnés par l'énoncé et sont néanmoins indispensables pour répondre à la question 11.
- La question 12 est relativement indépendante des autres : les résultats utiles sont énoncés dans le texte.

Première partie

1 et 2 Montrer que D_a (respectivement D_f) est une fonction polynomiale unitaire du second degré ; pour cela, commencer par montrer que la série de terme général $-2w_n a_n$ converge absolument.

Deuxième partie

4.b Utiliser l'inégalité triangulaire : $|x - f(t)| \geqslant |x| - |f(t)|$.

5 Utiliser la question précédente pour prouver l'existence du minimum. Montrer que M est un convexe.

6 Faire des dessins dans la copie donne toujours au correcteur une bonne impression.

Troisième partie

7 Montrer que $f^{-1}(\mathrm{J})$ est une union finie d'intervalles et remarquer que χ_{J} est la fonction indicatrice de l'ensemble $f^{-1}(\mathrm{J})$.

8.a Utiliser le fait que, si $\mathrm{A}_1, \ldots, \mathrm{A}_n$ sont des ensembles disjoints, alors

$$\mathbf{1}_{[\mathrm{A}_1 \cup \cdots \cup \mathrm{A}_n]} = \mathbf{1}_{\mathrm{A}_1} + \cdots + \mathbf{1}_{\mathrm{A}_n}$$

8.b Appliquer le théorème de convergence monotone de manière adéquate.

10.b En utilisant la caractérisation séquentielle, montrer que ϕ est continue à gauche et que $\phi(\cdot\, - 0)$ est continue à droite. Montrer que $\phi(x) \xrightarrow[x\to-\infty]{} 0$ et $\phi(x - 0) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1$.

10.c On a M = N ; pour le montrer, utiliser le fait (que l'on peut justifier à l'aide d'un dessin sur la copie) que l'ensemble des points où une fonction convexe atteint son minimum est exactement l'ensemble des points où la dérivée à gauche est négative, et la dérivée à droite positive.

Quatrième partie

11.a Montrer que si x n'est pas dans $f(\mathrm{I})$ et, si l'on choisit y « strictement » entre x et $\overline{f(\mathrm{I})}$, alors $\Delta(y) < \Delta(x)$. Ce raisonnement est à peaufiner car $f(\mathrm{I})$ n'est pas nécessairement un intervalle fermé. La remarque dans le corrigé donne une indication plus détaillée.

11.b Raisonner par l'absurde, avec N_f plutôt que M_f.

11.c $\mathrm{V}_f \leqslant \Delta(0)$. Prouver que $\mathrm{M}_f \subset [\,-2\|f\|_1\,;2\|f\|_1\,]$ en montrant que si x est tel que $|x| > 2\|f\|_1$, alors $\Delta(x) > \|f\|_1$.

12 Montrer que Δ_{g_n} converge uniformément vers Δ_g.

Première partie

1 Soit $x \in \mathbb{R}$. De l'inégalité bien connue $|2ab| \leqslant (a^2+b^2)$ (qui n'est qu'une réécriture de $(|a|-|b|)^2 \geqslant 0$) appliquée avec $a = a_n$ et $b = -w_n$, il vient :

$$\forall \mathrm{N} \in \mathbb{N} \qquad \sum_{n=0}^{\mathrm{N}} |-2w_n a_n| \leqslant \sum_{n=0}^{\mathrm{N}} w_n\, {a_n}^2 + \sum_{n=0}^{\mathrm{N}} w_n$$

Vu que les deux sommes partielles du membre de droite convergent et que pour tout n, $|-2w_n a_n|$ est positif, la série de terme général $-2w_n a_n$ converge absolument.

Donc chaque somme de l'expression

$$\sum_{n=0}^{+\infty} w_n\, {a_n}^2 - 2x \sum_{n=0}^{+\infty} w_n\, a_n + x^2 \underbrace{\sum_{n=0}^{+\infty} w_n}_{=1}$$

existe. On peut de plus rassembler les sommes pour obtenir :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} w_n\, {a_n}^2 - 2x \sum_{n=0}^{+\infty} w_n\, a_n + x^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} w_n\, (a_n - x)^2 = \mathrm{D}_a(x)$$

> L'argument « on peut rassembler les sommes » utilisé ici découle de la proposition suivante appliquée aux sommes partielles : si $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ sont deux suites convergentes, la suite $(a_n + b_n)_n$ est également convergente, sa limite étant la somme des limites de $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$. La réciproque n'est pas vraie : si l'on scinde en deux une série convergente, on n'obtient pas nécessairement deux séries convergentes.
>
> Ici, le meilleur moyen d'utiliser D_a est de montrer qu'il s'agit d'une fonction polynomiale ; c'est pour cela qu'on a raisonné avec trois termes.

Donc

$$\boxed{\mathrm{D}_a \text{ est bien définie sur } \mathbb{R}}$$

et

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \qquad \mathrm{D}_a(x) = x^2 - 2x \sum_{n=0}^{+\infty} w_n\, a_n + \sum_{n=0}^{+\infty} w_n\, {a_n}^2}$$

D_a est donc une fonction polynomiale unitaire de degré 2. En particulier,

$$\boxed{\mathrm{D}_a \text{ atteint son mimimum en un point unique sur } \mathbb{R}.}$$

De plus, on a :

$$\mathrm{D}_a{}'(x) = 2x - 2 \sum_{n=0}^{+\infty} w_n a_n$$

Le point où D_a atteint son minimum est naturellement le zéro de $\mathrm{D}_a{}'$.

$$\boxed{\mathrm{D}_a \text{ atteint son minimum en } x_0 = \sum_{n=0}^{+\infty} w_n\, a_n\,.}$$