Centrale Maths 2 MP 2002 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Tristan Poullaouec (Professeur agrégé) ; il a été relu par Benoît Chevalier (ENS Ulm) et Jean Starynkévitch (ENS Cachan).

Ce sujet traite des quadriques de $\mathbb{R}^3$ et des automorphismes orthogonaux qui les laissent invariantes ; il comporte deux parties indépendantes.

- Dans la première partie, on étudie une quadrique donnée explicitement, ses symétries et différentes propriétés des automorphismes orthogonaux qui la laissent globalement invariante.

  On utilise principalement les propriétés de base du groupe orthogonal (il laisse invariant le produit scalaire), la connaissance des rotations et, dans la partie I.D, la notation matricielle des formes quadratiques.

- Dans la seconde partie, on définit une forme quadratique f sur $\mathbb{R}^3$ *via* la donnée d'un endomorphisme symétrique U ; on s'attache d'abord à déterminer les endomorphismes tels que les surfaces de niveau de f soient des surfaces de révolution autour d'un axe donné, puis on classifie les différentes surfaces $f^{-1}(\{1\})$ (image réciproque de $\{1\}$ par f) envisageables.

  On utilise dans cette partie à peu près les mêmes notions que dans la première, ainsi que certaines propriétés des endomorphismes symétriques (caractérisation, diagonalisabilité).

Ce sujet ne présente pas de difficulté particulière : les questions sont assez directes et ne nécessitent pas l'usage d'astuces remarquables ; une bonne connaissance des notions du cours suffit donc pour en venir à bout. En outre, il est d'une longueur tout à fait raisonnable.

Indications

Partie I

I.A.1 Penser aux symétries. Noter qu'on demande des exemples et non une liste exhaustive.

I.A.4 Utiliser la question I.A.2.

I.B.1 De même qu'à la question I.A.1, on ne demande que quelques exemples. On peut remarquer (pour la suite) que si $\varphi \in \mathrm{O}(\mathrm{E})$ laisse $\mathrm{D}_{\boldsymbol{k}}$ invariant, alors elle laisse aussi son orthogonal $\mathrm{P}_{\boldsymbol{k}}$ invariant.

I.B.2.b Noter que φ est une isométrie.

I.C.2.a Aucune démonstration n'est demandée, mais une justification est tout de même bienvenue. On peut regarder l'action sur $\boldsymbol{k}$ et utiliser la question I.B.2.c.

I.C.2.b Utiliser la question I.C.2.a.

I.C.3.b.i Utiliser la question I.C.3.a.

I.C.3.b.iii Utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

I.C.4 Utiliser les questions I.C.2.c et I.C.3.b.

I.D.1 Raisonner par double inclusion : on peut calculer $q \circ \varphi(\boldsymbol{k})$ et $\|\varphi(\boldsymbol{k})\|^2$ pour le sens $\mathrm{C} \subset \mathrm{K}$, et montrer que φ est une isométrie du plan $\mathrm{P}_{\boldsymbol{k}}$ pour l'autre sens.

I.D.2.b Pas de démonstration demandée, mais une justification…

I.D.3 Remarquer, via l'expression matricielle, que q s'écrit $q(\boldsymbol{u}) = \langle \boldsymbol{u}, \sigma \boldsymbol{u} \rangle$.

I.D.4 Appliquer la relation de commutation à $\boldsymbol{k}$.

I.D.5 Utiliser les questions I.D.4, I.D.3 et I.D.1.

Partie II

II.B Utiliser la quesion II.A.

II.C.1 Au choix, s'inspirer des méthodes de polarisation ou utiliser la diagonalisabilité des endomorphismes symétriques.

II.C.4 Utiliser les questions II.A et II.C.1.

II.D.3 Utiliser les questions II.C.4 et II.D.2.

II.E.2 Utiliser la forme polaire de f.

II.E.3 Utiliser les questions II.A et II.D.3.

I. Étude d'un cas particulier

I.A Une étude de Q_0

I.A.1 On remarque aisément que pour tout réel t, $(-t)^2 = t^2$. Par définition

$$(x,y,z) \in Q_0 \iff x^2 + y^2 - z^2 = 0$$

donc $$(x,y,z) \in Q_0 \iff (-x,y,z) \in Q_0 \iff (x,-y,-z) \in Q_0$$

et Q_0 admet $P_{\boldsymbol{i}}$ et $D_{\boldsymbol{i}}$ respectivement comme plan et axe de symétrie. De même pour $P_{\boldsymbol{j}}$, $P_{\boldsymbol{k}}$, et $D_{\boldsymbol{j}}$, $D_{\boldsymbol{k}}$.

Enfin, comme $(x,y,z) \in Q_0$ si et seulement si $(-x,-y,-z) \in Q_0$, Q_0 admet l'origine $O(0,0,0)$ pour centre de symétrie.

> Comme l'énoncé ne demandait pas une liste complète d'éléments de symétrie de Q_0, on s'est contenté de donner ici quelques exemples simples. On en verra d'autres dans la suite du problème...

I.A.2 P_j est le plan vectoriel orthogonal à $\boldsymbol{j}$: on a donc

$$P_{\boldsymbol{j}} = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = 0 \right\}$$

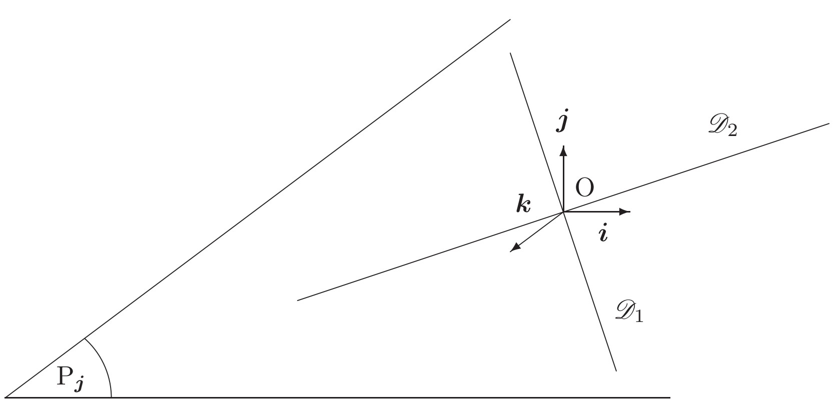
d'où $$Q_0 \cap P_{\boldsymbol{j}} = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid q(x,y,z) = 0 \quad \text{et} \quad y = 0 \right\}$$

et $$Q_0 \cap P_{\boldsymbol{j}} = \left\{ (x,0,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 - z^2 = 0 \right\}$$

soit comme $$x^2 - z^2 = 0 \iff x = z \quad \text{ou} \quad x = -z$$

on en déduit que l'intersection du plan $P_{\boldsymbol{j}}$ avec Q_0 consiste en la réunion des deux droites $\mathscr{D}_1 = D_{\boldsymbol{i}+\boldsymbol{k}}$ et $\mathscr{D}_2 = D_{\boldsymbol{i}-\boldsymbol{k}}$ d'équations respectives $x = z$ et $x = -z$.

En voici une représentation spatiale :



I.A.3.a Considérons un vecteur quelconque $\boldsymbol{u} = (x, y, z) \in \mathrm{E}$. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. R_θ est une isométrie vectorielle et préserve donc la norme. En outre, c'est une rotation d'axe $\mathrm{D}_{\boldsymbol{k}}$ donc elle fixe $\boldsymbol{k}$ et préserve la troisième coordonnée z.

De ce fait, si l'on note $\mathrm{R}_\theta(\boldsymbol{u}) = (x', y', z')$, on a

$$\|\mathrm{R}_\theta(\boldsymbol{u})\|^2 = \|\boldsymbol{u}\|^2 \qquad \text{et} \qquad z = z'$$

ie $$x'^2 + y'^2 + z'^2 = x^2 + y^2 + z^2 \qquad \text{et} \qquad z' = z$$

d'où $$x'^2 + y'^2 = x^2 + y^2 \qquad \text{et} \qquad z' = z$$

soit $$q \circ \mathrm{R}_\theta(\boldsymbol{u}) = x'^2 + y'^2 - z'^2 = x^2 + y^2 - z^2 = q(\boldsymbol{u})$$

Ainsi, pour tout $\boldsymbol{u}$ dans Q_0 et pour tout réel θ, on a $q \circ \mathrm{R}_\theta(\boldsymbol{u}) = q(\boldsymbol{u}) = 0$ soit $\mathrm{R}_\theta(\boldsymbol{u}) \in \mathrm{Q}_0$, donc

$$\boxed{\forall\, \theta \in \mathbb{R} \qquad \mathrm{R}_\theta(\mathrm{Q}_0) \subset \mathrm{Q}_0}$$

I.A.3.b On a montré $$\forall\, \theta \in \mathbb{R} \qquad \mathrm{R}_\theta(\mathrm{Q}_0) \subset \mathrm{Q}_0$$

soit $$\forall\, \theta \in \mathbb{R} \qquad \mathrm{R}_{-\theta}(\mathrm{Q}_0) \subset \mathrm{Q}_0$$

donc $$\mathrm{R}_\theta(\mathrm{R}_{-\theta}(\mathrm{Q}_0)) \subset \mathrm{R}_\theta(\mathrm{Q}_0) \subset \mathrm{Q}_0$$

d'où, comme $\mathrm{R}_{-\theta} = \mathrm{R}_\theta^{-1}$, $$\mathrm{Q}_0 \subset \mathrm{R}_\theta(\mathrm{Q}_0) \subset \mathrm{Q}_0$$

et finalement $$\boxed{\forall\, \theta \in \mathbb{R} \qquad \mathrm{R}_\theta(\mathrm{Q}_0) = \mathrm{Q}_0}$$

I.A.4 L'ensemble Q_0 étant invariante par toutes les rotations vectorielles R_θ, c'est une surface de révolution d'axe $\mathrm{D}_{\boldsymbol{k}}$. Elle est alors engendrée – comme toutes les surfaces de révolution – par son intersection avec un plan contenant l'axe : $\mathrm{P}_{\boldsymbol{j}}$ fait ici l'affaire.

Il nous suffit donc de considérer $\mathrm{Q}_0 \cap \mathrm{P}_{\boldsymbol{j}}$, qui – voir la question I.A.2 – est l'union de deux droites sécantes (et même orthogonales) en O et qui engendre par révolution autour de $\mathrm{D}_{\boldsymbol{k}}$ le cône Q_0 de sommet O et de demi-angle $\pi/4$.