CCP Maths 1 MP 2002 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Vincent Puyhaubert (ENS Cachan) ; il a été relu par Walter Appel (professeur en CPGE) et Éric Ricard (agrégé de mathématiques).

Ce sujet comporte un seul problème décomposé en trois parties indépendantes dans une très large mesure.

- La première partie permet de démontrer les premiers résultats concernant la théorie des produits infinis. On introduit la notion de convergence au sens de ces produits, puis on cherche des conditions nécessaires et suffisantes pour assurer cette convergence. On n'utilise aucune technique particulière et le candidat peut s'en sortir facilement s'il maîtrise correctement son cours sur les séries.
- La deuxième partie utilise un développement en série de Fourier classique afin d'établir une expression de la fonction sinus comme produit infini. Cette partie est calculatoire, la seule subtilité résidant dans la justification de l'interversion d'une limite et d'une intégrale (par exemple en montrant une convergence normale).
- La dernière partie introduit la fonction Γ. C'est une intégrale à paramètre très classique mais non moins difficile à étudier pour autant. Si le début de la partie concernant la continuité et la dérivabilité de cette fonction n'est que l'application pénible de résultats de cours, les résultats finaux sont intéressants et justifient qu'on s'y intéresse, quitte à sauter au besoin quelques questions dans la lecture du corrigé.

On notera que ce sujet est particulièrement long. Ceci étant, il expose ainsi la plus grande partie des résultats concernant la fonction Γ qui, rappelons-le, est un **très** grand classique des écrits, toutes écoles confondues.

Indications

Partie I

1 Remarquer que les suites $(\mathrm{P}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\mathrm{P}_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ ont même limite non nulle.

2.b Montrer que les suites des produits partiels sont proportionnelles.

3.b Utiliser la question 1 et l'équivalent $\ln(1+t) \underset{t\to 0}{\sim} t$.

3.c Raisonner comme à la question précédente.

4.c Chercher un développement limité à l'ordre 2 du terme général du produit infini.

5 Montrer que $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{1}{p_k}\right)^{-1} \geqslant \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$.

Partie II

6 Remarquer que la fonction dont on calcule les coefficients de Fourier est paire et continue.

7.a Utiliser les développements limités des fonctions sinus et cosinus.

7.b Utiliser la question 6.

7.c Montrer que la convergence est normale dans l'expression de la question 7.b définissant g comme somme d'une série.

Partie III

9.a Utiliser un équivalent en 0 et montrer que f est négligeable devant $t\mapsto e^{-\frac{t}{2}}$ en l'infini.

9.c Utiliser le théorème de dérivabilité des intégrales à paramètre.

10.a Utiliser l'inégalité $\ln(1+t)\leqslant t$ valable pour tout réel t strictement plus grand que -1.

10.b Utiliser le théorème de convergence dominée à l'aide de la question précédente.

11.a Intégrer par parties.

11.b Montrer par récurrence : $\mathrm{I}_n(x) = \dfrac{n!}{x(x+1)\cdots(x+n)}$.

11.c Établir une relation entre le terme général de la suite dont Γ est la limite à la question 10.b et la fonction I_n.

12.a Utiliser la question 11.c.

12.b Utiliser la question 7.c.

12.c Calculer $\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right)$ et relier cette valeur à $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-u^2}\,du$ à l'aide d'un changement de variable.

13.a Utiliser un théorème de comparaison série-intégrale.

13.b Relier le terme v_n de cette suite aux sommes partielles de la série de la question précédente.

14 Appliquer le logarithme au terme général de la suite dont Γ est la limite et remplacer le terme en $\ln n$ par une somme en utilisant la question précédente.

15.a Utiliser l'expression de $\ln\Gamma$ sous la forme de somme d'une série obtenue à la question précédente.

15.b Relier cette intégrale à Γ' à l'aide de la question 9.c.

I. Généralités et exemples

1 Supposons que le produit infini $(\mathrm{P}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Alors, par définition, il existe un réel non nul l tel que :

$$\mathrm{P}_n \xrightarrow[n\to\infty]{} l$$

On en déduit que :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\mathrm{P}_n} = \frac{1}{l} \qquad \text{et} \qquad \lim_{n\to+\infty} \mathrm{P}_{n+1} = l$$

La limite du produit de deux suites étant le produit des limites, on a :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\mathrm{P}_{n+1}}{\mathrm{P}_n} = \lim_{n\to+\infty} u_{n+1} = \frac{l}{l} = 1$$

Par conséquent :

$$\boxed{\text{Si } (\mathrm{P}_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge, la suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge vers 1.}}$$

2.a La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 1. Posons $\varepsilon = 1/2$. Alors par définition de la convergence :

$$\exists\, n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall\, n \in \mathbb{N} \qquad n \geqslant n_0 \Longrightarrow |u_n - 1| < \varepsilon = \frac{1}{2}$$

En particulier, pour un tel n_0 :

$$\boxed{n \geqslant n_0 \Longrightarrow u_n > \frac{1}{2} > 0}$$

2.b On sait que pour tout entier n, le réel u_n est non nul. Par conséquent, on a :

$$c = \prod_{k=0}^{n_0-1} u_k \neq 0$$

Il existe donc une constante non nulle c telle que :

$$\forall n \geqslant n_0 \qquad \prod_{k=0}^{n} u_k = c \prod_{k=n_0}^{n} u_k$$

Par conséquent, les deux suites $\left(\prod\limits_{k=0}^{n} u_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\left(\prod\limits_{k=n_0}^{n} u_k\right)_{n\geqslant n_0}$ sont de même nature. La définition même de la convergence des produits infinis entraîne que :

$$\boxed{\text{Les produits infinis } \prod_{k\geqslant 0} u_k \text{ et } \prod_{k\geqslant n_0} u_k \text{ sont de même nature.}}$$

3.a Supposons que la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} \ln u_n$ converge. Soient $(\mathrm{S}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite des sommes partielles et l sa limite dans $\mathbb{R}$. Alors :

$$\ln\left(\prod_{k=0}^{n} u_k\right) = \sum_{k=0}^{n} \ln u_k = \mathrm{S}_n \xrightarrow[n\to\infty]{} l$$

L'exponentielle étant une fonction continue, on en déduit que :

$$\prod_{k=0}^{n} u_k = e^{\mathrm{S}_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} e^l \neq 0$$

Par conséquent, le produit infini $\prod\limits_{k\geqslant 0} u_k$ converge.

Réciproquement, supposons que le produit infini converge et soit L non nul tel que :

$$\lim_{n\to+\infty} \prod_{k=0}^{n} u_k = \mathrm{L}$$

Les éléments de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant tous strictement positifs, on en déduit que si la limite du produit est non nulle, alors elle est strictement positive (ainsi que tous les produits partiels). Par conséquent, on peut appliquer le logarithme à ses éléments. Sachant que la fonction logarithme est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, on a alors :

$$\mathrm{S}_n = \sum_{k=0}^{n} \ln(u_k) = \ln\left(\prod_{k=0}^{n} u_k\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} \ln \mathrm{L}$$

Par conséquent, la série converge. On a donc bien :

$$\boxed{\text{Le produit } \prod_{k\geqslant 0} u_k \text{ converge si et seulement si la série } \sum_{k\geqslant 0} \ln u_k \text{ converge.}}$$

3.b D'après la question précédente, il nous suffit de montrer que si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de réels strictement positifs, alors :

$$\sum_{n\geqslant 0} u_n \text{ converge si et seulement si } \sum_{n\geqslant 0} \ln(1+u_n) \text{ converge.}$$

Supposons dans un premier temps que la série $\sum u_n$ converge. Alors, son terme général tend vers 0 et donc :

$$\ln(1+u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n$$

Le théorème de comparaison des séries à termes strictement positifs assure alors que les deux séries sont de même nature et donc :

$$\sum_{n\geqslant 0} \ln(1+u_n) \text{ converge.}$$

Supposons maintenant que la série $\sum \ln(1+u_n)$ converge. De la même manière, on en déduit que son terme général $\ln(1+u_n)$ tend vers 0 en l'infini. En passant à l'exponentielle qui est une fonction continue, on en déduit que :

$$1+u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} e^0 = 1$$

Par conséquent, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend de nouveau vers 0 et on conclut de même par le théorème de comparaison des séries à terme général strictement positif.

En vertu de la question précédente, on a bien ainsi :

$$\boxed{\text{Le produit } \prod_{k\geqslant 0} (1+u_k) \text{ converge si et seulement si la série } \sum_{k\geqslant 0} u_k \text{ converge.}}$$

3.c On a $0 < u_n < 1$ donc $0 < 1-u_n < 1$. On peut donc considérer la série de terme général $\ln(1-u_n)$. La démonstration est alors strictement identique à celle de la