Mines Physique 2 PSI 2001 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Matthieu Denoual (ENS Cachan) ; il a été relu par Yannick Alméras (professeur en CPGE) et Stéphane Ravier (ENS Lyon).

Le sujet porte sur l'étude d'une boucle à verrouillage de phase. Ce dispositif est utile dans les systèmes nécessitant la synthèse d'un signal dont la fréquence doit être asservie à un signal de commande.

Dans un premier temps, différents éléments constituant cette boucle sont étudiés successivement (oscillateur, oscillateur contrôlé en tension, comparateur de phases). Ensuite, on étudie plus particulièrement le fonctionnement de la boucle, notamment les plages de verrouillage et de capture.

Ce problème, très calculatoire, met en évidence, au prix de nombreuses hypothèses simplificatrices, les phénomènes de capture et de poursuite de la boucle à verrouillage de phase.

Indications

Partie I

1 Appliquer la loi des nœuds.

2 Étudier la partie réelle des solutions.

5 Montrer d'abord que $i(t)$ est impaire.

8 En régime purement sinusoïdal, les racines sont imaginaires pures.

9 Montrer que $0 < \mathrm{H}(\theta_0) < \pi$ et en déduire les inégalités obtenues aux questions 2 et 3.

Partie II

13 En se servant des hypothèses, effectuer des développements limités. Attention, k n'intervient pas dans l'expression de k'.

Partie III

14 Attention, les entrées de l'amplificateur opérationnel ont été interverties.

Partie IV

17 Partir de l'équation temporelle du filtre.

18 C'est la tension de commande de l'OCT qui limite la plage d'excursion en fréquence.

19 Analyser la partie réelle des solutions.

20 Utiliser un peu de trigonométrie et suivre les hypothèses pour des simplifications.

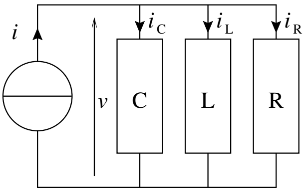
21 Utiliser une méthode reposant sur la notation complexe. Penser au théorème de superposition.

26 Utiliser les notations de Laplace.

27 Partir de l'équation [1] de la question 17.

I. Oscillateur

1 La loi des nœuds pour le circuit de la figure ci-dessous s'écrit



$$i = i_{\rm R} + i_{\rm C} + i_{\rm L}$$

en passant en notations de Laplace, on obtient

$$i(p) = \frac{v(p)}{\rm R} + p\,{\rm C}\,v(p) + \frac{1}{p\,{\rm L}}v(p)$$

On pose $\dfrac{{\rm d}i}{{\rm d}t} = g_k\,\dfrac{{\rm d}v}{{\rm d}t}$, soit en notations de Laplace

$$p\,i(p) = g_k\,p\,v(p)$$

g_k correspond alors à la pente des portions de la caractéristique courant-tension du générateur.

- $|\,v(t)\,| < {\rm V}_0$ alors $k = 1$.
- $|\,v(t)\,| \geqslant {\rm V}_0$ alors $k = 2$.

En utilisant ces notations et en multipliant la loi des nœuds en notations de Laplace par ${\rm L}\,p$, on arrive à

$${\rm L}\,g_k\,p\,v(p) = \frac{{\rm L}\,p}{\rm R}v(p) + {\rm L\,C}\,p^2\,v(p) + v(p)$$

soit $${\rm L\,C}\,p^2\,v(p) + {\rm L}\left(\frac{1}{\rm R} - g_k\right)p\,v(p) + v(p) = 0$$

En repassant en notations temporelles, on obtient les deux formes de l'équation différentielle relative à $v(t)$:

$$\boxed{\begin{cases} \text{cas } |\,v(t)\,| < {\rm V}_0, \quad g_k = g_1 \quad \text{soit} \quad {\rm LC}\dfrac{{\rm d}^2 v}{{\rm d}t^2} + {\rm L}\left(\dfrac{1}{\rm R} - g_1\right)\dfrac{{\rm d}v}{{\rm d}t} + v = 0 \\[2ex] \text{cas } |\,v(t)\,| > {\rm V}_0, \quad g_k = g_2 \quad \text{soit} \quad {\rm LC}\dfrac{{\rm d}^2 v}{{\rm d}t^2} + {\rm L}\left(\dfrac{1}{\rm R} - g_2\right)\dfrac{{\rm d}v}{{\rm d}t} + v = 0 \end{cases}}$$

On peut également obtenir le résultat en restant dans le domaine temporel.

$$i = i_{\rm R} + i_{\rm C} + i_{\rm L}$$

$$i = \frac{v}{\rm R} + {\rm C}\frac{{\rm d}v}{{\rm d}t} + \frac{1}{\rm L}\int v\ {\rm d}t$$

En dérivant par rapport à t :

$$\frac{{\rm d}i}{{\rm d}t} = \frac{1}{\rm R}\frac{{\rm d}v}{{\rm d}t} + {\rm C}\frac{{\rm d}^2 v}{{\rm d}t^2} + \frac{1}{\rm L}v$$

$${\rm L}\frac{{\rm d}i}{{\rm d}t} = \frac{\rm L}{\rm R}\frac{{\rm d}v}{{\rm d}t} + {\rm LC}\frac{{\rm d}^2 v}{{\rm d}t^2} + v$$

alors $${\rm L}g_k\,\frac{{\rm d}v}{{\rm d}t} = \frac{\rm L}{\rm R}\frac{{\rm d}v}{{\rm d}t} + {\rm LC}\frac{{\rm d}^2 v}{{\rm d}t^2} + v$$

d'où
$$\mathrm{LC}\frac{\mathrm{d}^2 v}{\mathrm{d}t^2}+\mathrm{L}\left(\frac{1}{\mathrm{R}}-g_k\right)\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}+v=0$$

$$\boxed{\begin{cases} |\,v(t)\,| < \mathrm{V}_0 \quad \text{soit} \quad \mathrm{LC}\,\dfrac{\mathrm{d}^2 v}{\mathrm{d}t^2}+\mathrm{L}\left(\dfrac{1}{\mathrm{R}}-g_1\right)\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}+v=0 \\ |\,v(t)\,| > \mathrm{V}_0 \quad \text{soit} \quad \mathrm{LC}\,\dfrac{\mathrm{d}^2 v}{\mathrm{d}t^2}+\mathrm{L}\left(\dfrac{1}{\mathrm{R}}-g_2\right)\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}+v=0 \end{cases}}$$

2 L'instant initial correspond au premier cas ($v(0^-)=0<\mathrm{V}_0$) de la question précédente. Par ailleurs, on a $v(0^+)=0$ car la tension est continue aux bornes d'un condensateur. L'équation caractéristique de l'équation différentielle est alors

$$\mathrm{LC}\,r^2+\mathrm{L}\left(\frac{1}{\mathrm{R}}-g_1\right)r+1=0$$

Le système est instable si une solution de l'équation caractéristique a une partie réelle positive (exponentielle croissante). Si l'on identifie l'équation précédente à la forme classique reprise ci-dessous

$$a\,r^2+b\,r+c=0$$

il faut distinguer deux cas suivant le signe du discriminant de l'équation.

- Si $\Delta \geqslant 0$: alors il y a deux racines réelles dont la somme vaut $\dfrac{-b}{a}$ et le produit $\dfrac{c}{a}$. Or ici, $\dfrac{c}{a}$ est strictement positif, donc les racines ont le même signe. Ce signe est celui de $\dfrac{-b}{a}$. Par conséquent, le système est instable si et seulement si

  $\dfrac{-b}{a}>0$; c'est-à-dire, puisque a est strictement positif, si et seulement si $b<0$.
- Si $\Delta<0$: alors il y a deux racines complexes conjuguées de partie réelle $\dfrac{-b}{2a}$.

  La condition d'instabilité est alors $\dfrac{-b}{2a}>0$ soit $b<0$, puisque $a>0$.

Dans notre cas, la condition $b<0$ se traduit par

$$\frac{\mathrm{L}\left(\dfrac{1}{\mathrm{R}}-g_1\right)}{2\,\mathrm{LC}}<0$$

Or $\mathrm{L}>0$ et $\mathrm{C}>0$, donc la condition est $\dfrac{1}{\mathrm{R}}-g_1<0$.

Soit
$$\boxed{\mathrm{R}\,g_1>1}$$

3 L'apparition d'oscillations stables, d'amplitude bornée, rend nécessaire la diminution de l'amplitude des oscillations à partir d'un certain moment. C'est la non linéarité de la caractéristique du générateur qui permet d'obtenir une réponse décroissante du système. Cette réponse est décroissante si les parties réelles des solutions de l'équation