CCP Maths 2 PSI 2001 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Vincent Perrier (ENS Lyon) ; il a été relu par David Lecomte (ENS Cachan) et Nicolas Andraud (Mines de Paris).

Le problème porte sur une accélération de la convergence de la méthode des trapèzes pour le calcul d'intégrales.

Dans la première partie on établit une formule d'extrapolation en $\mathrm{O}\left(h^{n(n+1)}\right)$. Puis, dans la deuxième partie, on introduit les polynômes de Bernoulli et on étudie certaines de leurs propriétés afin d'établir la formule d'Euler-Maclaurin. Enfin dans la troisième partie, on exprime une approximation de l'intégrale de f par la méthode des trapèzes à l'aide de la formule d'Euler-Maclaurin, puis on accélère la convergence de ce processus à l'aide des résultats de la première partie.

Ce problème ne pose pas de difficulté mathématique majeure et pourrait être résolu dans sa quasi-totalité par un bon élève de mathématiques supérieures. Il nécessite cependant beaucoup de rigueur dans les calculs.

Indications

Première partie

I.2.3 Raisonner par récurrence.

I.2.4 Utiliser la question I.2.1.

I.5.1 Utiliser la formule de Taylor-Young.

I.5.2 Développer g au voisinage de α à l'ordre 1.

I.6.2 Utiliser les questions I.5.1 et I.5.2.

I.7.1 Utiliser la formule de récurrence obtenue à la question I.3.4. Pour voir apparaître des différences entre les $\mathrm{A}_{p,q}$, il faut approximer au moins à 10^{-7} près.

Deuxième partie

II.2.1 Montrer que $\widetilde{\mathrm{B}}_n(t)$ vérifie (**i**) et (**ii**), puis montrer par récurrence que la suite définie par ces deux hypothèses est unique.

II.2.2 Utiliser les questions II.2.1 et II.1.3.

II.3.2 Raisonner par récurrence sur n ; le passage de n à $n+1$ se fait à l'aide d'une intégration par parties.

II.4.3 Appliquer (**1**) aux f_q et sommer les égalités obtenues pour q entre 1 et N.

Troisième partie

III.5.1 Montrer que $t \mapsto \dfrac{\sin(t)}{t}$ est développable en série entière, avec un rayon de convergence infini.

I. Procédé d'extrapolation de Richardson

I.1.1 On sait que
$$\varphi(t) = \mathrm{O}\left((\rho t)^s\right)$$

Donc
$$\exists\alpha > 0 \quad \exists \mathrm{M} > 0 \quad \forall t \in [-\alpha;\alpha] \qquad \left|\frac{\varphi(t)}{(\rho t)^s}\right| \leqslant \mathrm{M}$$

d'où
$$\forall t \in [-\alpha;\alpha] \qquad \left|\frac{\varphi(t)}{t^s}\right| \leqslant \mathrm{M}\rho^s$$

La fonction $t \mapsto \dfrac{\varphi(t)}{t^s}$ est donc bornée sur $[-\alpha;\alpha]$.

On en déduit
$$\boxed{\varphi(t) = \mathrm{O}\left(t^s\right)}$$

I.1.2 On a
$$\varphi(t) = \mathrm{O}\left(t^k\right)$$

Donc
$$\exists\alpha > 0 \quad \exists \mathrm{M} > 0 \quad \forall t \in [-\alpha;\alpha] \qquad \left|\frac{\varphi(t)}{t^k}\right| \leqslant \mathrm{M}$$

D'où
$$\forall t \in [-\alpha;\alpha] \qquad \left|\frac{\varphi(t)}{t^{k-1}}\right| \leqslant \mathrm{M}|t|$$

Or
$$\lim_{t\to 0} \mathrm{M}|t| = 0$$

D'après le théorème d'encadrement :
$$\boxed{\lim_{t\to 0} \frac{\varphi(t)}{t^{k-1}} = 0}$$

I.2.1 On a $\mathrm{A}(t) - a_0 = \mathrm{O}\left(t\right)$. Donc $t \mapsto \mathrm{A}(t) - a_0$ admet une limite quand t tend vers 0 et cette limite est nulle, d'après la question précédente.

On en déduit que $t \mapsto \mathrm{A}(t)$ admet une limite quand t tend vers 0 et que cette limite est a_0.

D'où
$$\boxed{\lim_{t\to 0} \mathrm{A}(t) = a_0}$$

I.2.2 Par définition,
$$\mathrm{A}_1(t) = \frac{r\mathrm{A}_0(t) - \mathrm{A}_0(rt)}{r-1} = \frac{r\mathrm{A}(t) - \mathrm{A}(rt)}{r-1}$$

Donc, au voisinage de zéro :
$$\begin{aligned}
\mathrm{A}_1(t) = {} & \frac{r}{r-1}\Big(a_0 + a_1 t + a_2 t^2 \cdots + \mathrm{O}\left(t^{k+1}\right)\Big) \\
& - \frac{1}{r-1}\Big(a_0 + a_1 rt + a_2 (rt)^2 \cdots + \mathrm{O}\left((rt)^{k+1}\right)\Big) \\
\mathrm{A}_1(t) = {} & a_0 + \left(\frac{r}{r-1}a_1 - \frac{1}{r-1}a_1 r\right)t + \left(\frac{r}{r-1}a_2 - \frac{1}{r-1}a_2 r^2\right)t^2 \\
& + \cdots + \mathrm{O}\left(t^{k+1}\right)
\end{aligned}$$

En posant $a_{1,2} = \dfrac{r-r^2}{r-1}a_2$, on a bien :

$$\boxed{\mathrm{A}_1(t) = a_0 + a_{1,2}t^2 + \cdots + \mathrm{O}\left(t^{k+1}\right)}$$

I.2.3 Raisonnons par récurrence sur n pour prouver ce résultat.

Notons $\mathcal{P}(n)$ la propriété « Il existe $a_{n,n+1}$ tel qu'au voisinage de 0 on ait $\mathrm{A}_n(t) = a_0 + a_{n,n+1}t^{n+1} + \cdots + \mathrm{O}\left(t^{k+1}\right)$ » et montrons que celle-ci est vraie pour tout n dans $\mathbb{N}$.

- $\underline{\mathcal{P}(0)}$ est vraie, car A_0 admet un développement limité au voisinage de 0.

> On sait même que $\mathcal{P}(1)$ est vraie, d'après la question précédente, laquelle peut donc paraître superflue ; en réalité, elle est là pour introduire cette question.

- $\underline{\mathcal{P}(n) \Longrightarrow \mathcal{P}(n+1)}$

$$\begin{aligned}
\mathrm{A}_{n+1}(t) &= \frac{r^{n+1}\mathrm{A}_n(t) - \mathrm{A}_n(t)}{r^{n+1}-1} \\
&= \frac{r^{n+1}}{r^{n+1}-1}\left(a_0 + a_{n,n+1}t^{n+1} + a_{n,n+2}t^{n+2} + \cdots + \mathrm{O}\left(t^{k+1}\right)\right) \\
&\qquad - \frac{1}{r^{n+1}-1}\Big(a_0 + a_{n,n+1}(rt)^{n+1} + a_{n,n+2}(rt)^{n+2} \\
&\qquad\qquad + \cdots + \mathrm{O}\left((rt)^{k+1}\right)\Big) \\
\mathrm{A}_{n+1}(t) &= a_0 + \left(\frac{r^{n+1}}{r^{n+1}-1}a_{n,n+1} - \frac{1}{r^{n+1}-1}a_{n,n+1}r^{n+1}\right)t^{n+1} \\
&\qquad + \frac{r^{n+1}-r^{n+2}}{r^{n+1}-1}a_{n,n+2}t^{n+2} + \cdots + \mathrm{O}\left(t^{k+1}\right)
\end{aligned}$$

Donc, en posant $a_{n+1,n+2} = \dfrac{r^{n+1}-r^{n+2}}{r^{n+1}-1}a_{n,n+2}$, on obtient bien :

$$\mathrm{A}_{n+1}(t) = a_0 + a_{n+1,n+2}t^{n+2} + \cdots + \mathrm{O}\left(t^{k+1}\right)$$

ce qui veut dire que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

- $\underline{\text{Conclusion}}$: la propriété $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Donc, au voisinage de 0,

$$\boxed{\mathrm{A}_n(t) = a_0 + a_{n,n+1}t^{n+1} + \cdots + \mathrm{O}\left(t^{k+1}\right)}$$