Mines Physique 2 PC 2001 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Florent Tournus (ENS Lyon) ; il a été relu par Jean-David Picon (École Polytechnique) et Stéphane Ravier (ENS Lyon).

Ce sujet est composé de deux parties liées et porte sur un thème unique : l'ultracentrifugation. Cette technique est très utilisée en biologie pour séparer des macromolécules et repose, comme son nom l'indique, sur les effets de la force centrifuge.

- Dans la première partie, on étudie le principe de l'ultracentrifugation et on établit l'équation de sédimentation, qui fait intervenir diffusion et convection. On étudie ensuite la dynamique des particules de soluté (sédimentation) en négligeant la diffusion ; enfin, on détermine le profil de concentration obtenu à $t \to +\infty$ (régime stationnaire) par diffusion.
- Dans la seconde partie, on se place dans un cas où la solution présente déjà un profil de masse volumique stationnaire (ultracentrifugation d'équilibre) qui est mis à profit pour séparer des macromolécules.

Indications

Première partie

3 Considérer que la force centrifuge est constante sur le volume d'une particule microscopique de soluté.

4 La vitesse limite dépend de r.

6 Écrire une équation différentielle, vérifiée par v, faisant apparaître un temps caractéristique. Pour estimer son ordre de grandeur, se servir de l'unité donnée pour s. Il faut supposer que r ne varie pas sur la durée qui nous intéresse.

8 Exprimer la conservation locale du nombre de particules, avec des courants de convection et de diffusion.

10 Vérifier que la solution donnée est la bonne (c'est suffisant), ou bien, si on veut aller plus loin, montrer qu'on a un front se déplaçant à v_{lim} et que, devant ce front, c reste indépendant de r.

14 Revenir à l'équation de sédimentation de la question 8 et utiliser le fait que le courant total de particules est nul en r_m et r_{M}.

15 Montrer que la force totale que subissent les particules (faisant intervenir la masse apparente de la question 4) dérive d'un potentiel.

Seconde partie

17 Exprimer la masse d'un volume de solution de deux façons différentes.

18 Utiliser la conservation du nombre de paires [CsCl] pour déterminer E.

19 Montrer qu'il n'existe qu'une seule position d'équilibre stable pour les macromolécules.

20 Utiliser l'équation différentielle de la question 14, appliquée aux macromolécules, et développer s_{macro} autour de r_0. Utiliser ensuite la relation d'Einstein établie à la question 16.

I. Ultracentrifugation dynamique (sédimentation)

1 Le rotor est un solide en rotation très rapide autour d'un axe. C'est donc un problème d'équilibrage : il faut minimiser les contraintes exercées sur l'axe. Pour cela, il faut que le centre d'inertie du rotor soit sur l'axe de rotation (équilibrage statique) et que le moment cinétique du rotor soit dirigé selon l'axe de rotation (équilibrage dynamique). Une condition suffisante (mais non nécessaire) pour cela est que l'axe de rotation soit aussi axe de symétrie du rotor, ce qui est le cas avec des cavités identiques, disposées régulièrement et en nombre pair.

> On peut avoir une symétrie axiale, sans avoir des cavités identiques, disposées régulièrement.
>
> Pour plus de précisions sur les solides en rotation et les questions d'équilibrage, on pourra consulter le livre de J.-P. Pérez, *Mécanique : mécanique du point et des systèmes matériels*, chez Masson.

De plus, pour des raisons expérimentales, il est préférable d'avoir des cavités identiques et disposées régulièrement. En effet, pour réaliser des mesures (cf. question 12) et comparer les résultats obtenus dans chaque cellule, il faut qu'elles aient subi exactement le même traitement.

2 Le solvant est en mouvement circulaire uniforme autour de l'axe de rotation. Il est à l'équilibre dans le référentiel $\mathscr{R}$ lié au rotor, en rotation uniforme à la vitesse angulaire ω par rapport au référentiel terrestre $\mathscr{R}_0$. L'accélération a_{e} d'un élément de solvant situé à une distance r de l'axe est donc

$$\boxed{a_{\text{e}} = r\omega^2 = 1,37.10^6 \text{ m.s}^{-2}}$$

Appliquons le principe fondamental de la dynamique (PFD) à une particule de soluté de masse m, dans le référentiel $\mathscr{R}$ ($\mathscr{R}_0$ étant supposé galiléen) :

$$m\overrightarrow{a} = \overrightarrow{\text{P}} + \overrightarrow{\text{F}} - m\overrightarrow{a_{\text{e}}} - m\overrightarrow{a_{\text{c}}} + \overrightarrow{\text{F}_{\text{A}}}$$

avec $\begin{array}{l} \overrightarrow{\text{P}} = m\overrightarrow{g} \\ \overrightarrow{\text{F}} = -f\,\overrightarrow{v} \end{array}$ et $\begin{array}{ll} \text{accélération d'entraînement :} & \overrightarrow{a_{\text{e}}} = -r\omega^2\,\overrightarrow{u_r} \\ \text{accélération de Coriolis :} & \overrightarrow{a_{\text{c}}} = 2\,\overrightarrow{\omega} \wedge \overrightarrow{v} \end{array}$

$\overrightarrow{\text{F}_{\text{A}}}$ représentant la résultante des forces de pression du solvant sur la particule de soluté. D'après le précédent calcul de a_{e}, on a

$$\boxed{g \ll a_{\text{e}}}$$

ce qui permet de négliger la pesanteur.

De même, pour négliger la force de Coriolis, il faut que $a_{\text{c}} \ll a_{\text{e}}$, ce qui est assuré si $\omega v \ll r\omega^2$, c'est-à-dire pour

$$\boxed{v \ll r\omega}$$

Avec les valeurs de l'énoncé, on a $r\omega \simeq 262$ m.s^{-1}, ce qui représente une vitesse assez énorme, devant laquelle la vitesse d'une particule de soluté devrait a priori être négligeable. Cette hypothèse sera examinée a posteriori à la question 4.

> Concernant $\overrightarrow{\text{F}_{\text{A}}}$ et $\overrightarrow{\text{F}}$, on verra par la suite qu'il ne faut effectivement pas les négliger, sauf cas particulier.

3 L'équation de l'hydrostatique est

$$\overrightarrow{\text{grad}}\ p = \overrightarrow{f}_{\text{v}}$$

où $\overrightarrow{f}_{\text{v}}$ représente les forces volumiques appliquées à l'élément de fluide en équilibre. Comme on étudie l'équilibre du solvant dans le référentiel tournant $\mathscr{R}$, il faut tenir compte des forces volumiques d'inertie. Or, on a vu à la question précédente que l'on pouvait négliger la pesanteur et il n'y a pas ici de force de Coriolis, ni de frottement fluide puisque l'on s'intéresse au solvant, à l'équilibre dans $\mathscr{R}$. Par conséquent, la seule force volumique à prendre en compte est la force d'inertie d'entraînement (force centrifuge). On a donc

$$\overrightarrow{f}_{\text{v}} = -\rho_0 \overrightarrow{a_{\text{e}}} = \rho_0\, r\omega^2\, \overrightarrow{u_r}$$

d'où
$$\boxed{\overrightarrow{\text{grad}}\ p = \frac{\partial p}{\partial r}\, \overrightarrow{u_r} = \rho_0\, r\omega^2\, \overrightarrow{u_r}}$$

La résultante des forces de pression du solvant sur une particule de soluté (« poussée d'Archimède ») est

$$\overrightarrow{\text{F}_{\text{A}}} = \oiint p.\,\text{d}\overrightarrow{\text{S}} = \iiint_{\text{V}} -\overrightarrow{\text{grad}}\ p\ \text{d}\tau$$

Or on a $\overrightarrow{\text{grad}}\ p = \rho_0\, r\omega^2\, \overrightarrow{u_r}$, qui peut être considéré comme constant sur le volume V de la particule microscopique de soluté. L'intégrale sur le volume de la particule se réduit donc à une multiplication de $-\rho_0\, r\omega^2\, \overrightarrow{u_r}$ par V. Avec $\text{V} = \beta m$, on en déduit

$$\boxed{\overrightarrow{\text{F}_{\text{A}}} = -\beta\, m\rho_0\, r\omega^2\, \overrightarrow{u_r}}$$

- Il est important de préciser que la particule de soluté est supposée suffisamment petite pour que l'on puisse considérer que $\overrightarrow{a_{\text{e}}}$ est identique sur toute la particule.
- On remarque que cette « poussée d'Archimède » représente bien le « poids » du volume de solvant déplacé, avec $\beta m\rho_0$ qui correspond à la masse du volume de solvant déplacé, et où $-r\omega^2\, \overrightarrow{u_r} = \overrightarrow{a_{\text{e}}}$ remplace le $-\overrightarrow{g}$ de la poussée d'Archimède habituelle dans le champ de pesanteur.
- Selon la valeur de $\beta\rho_0$, autrement dit du rapport de la masse volumique du solvant sur celle du soluté, cette « poussée d'Archimède » peut être du même ordre de grandeur que ma_{e}, bien plus grand, ou négligeable. Dans les cas les plus vraisemblables, $\beta\rho_0$ est de l'ordre de 1, c'est-à-dire que solvant et soluté ont des masses volumiques voisines, ce qui justifie l'utilisation d'une telle technique d'ultracentrifugation pour les séparer (sinon la décantation suffit).

4 La particule de soluté subit (les autres forces étant négligées)

- une force de frottement fluide $\overrightarrow{\text{F}} = -f\,\overrightarrow{v}\,;$
- la force d'inertie d'entraînement $-m\overrightarrow{a_{\text{e}}} = mr\omega^2\, \overrightarrow{u_r}\,;$
- la « poussée d'Archimède » $\overrightarrow{\text{F}_{\text{A}}} = -\beta\, m\rho_0\, r\omega^2\, \overrightarrow{u_r}\,.$