Centrale Maths 2 PC 2001 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par David Lecomte (ENS Cachan) ; il a été relu par Thomas Chomette (ENS Ulm) et Yohann Genzmer (ENS Cachan).

Dans ce problème, on s'intéresse à six propriétés particulières que sont susceptibles de posséder certains sous-ensembles $\mathcal{L}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On étudie notamment les liens entre ces propriétés pour des parties $\mathcal{L}$ priviliégiées de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Entrons un peu dans les détails...

- Dans une première partie, on prend pour $\mathcal{L}$ l'ensemble des matrices inversibles et l'ensemble des matrices triangulaires inférieures, pour lesquels on est capable de préciser sans trop de difficulté quelles propriétés parmi $\mathrm{P}_1, \ldots, \mathrm{P}_6$ sont vérifiées. Puis on se place en dimension 2 et on étudie les sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ contenant l'identité. On montre notamment que s'ils vérifient P_6, ils vérifient aussi P_1.
- La deuxième partie est consacrée aux parties $\mathcal{L}$ qui vérifient $\mathrm{P}_3, \ldots, \mathrm{P}_6$. On y montre que $\mathcal{L}$ vérifie aussi P_1.
- Enfin, la troisième partie est consacrée aux sous-algèbres de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, qui sont également des hyperplans, la conclusion étant qu'une telle sous-algèbre est nécessairement $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

C'est un problème assez facile, par lequel il convient de commencer lorsqu'on souhaite évaluer ses connaissances de base en algèbre. Il présente l'intérêt de toucher un peu à toutes les parties du programme d'algèbre linéaire de la classe de PC, de l'algèbre linéaire élémentaire aux espaces préhilbertiens.

Indications

Partie I

I.A.1 Trouver A en la considérant comme une matrice de changement de base. Utiliser ce résultat pour montrer qu'un sous-espace vectoriel strict de V, non réduit à $\{0\}$, ne peut être stable par $\mathcal{L}$.

I.C.1 Pour montrer que A est une homothétie, utiliser le premier résultat établi dans cette question, ainsi que le fait que toute matrice complexe admet une valeur propre.

I.C.2 Supposer P_1 non satisfaite et utiliser la question précédente pour établir que tout sous-espace vectoriel de V est stable par $\mathcal{L}$.

Partie II

II.A Pour obtenir que $\mathrm{U} = \{\mathrm{N}z_1,\ \mathrm{N} \in \mathcal{L}\} = \mathrm{V}$, montrer qu'il s'agit d'un sous-espace vectoriel, stable par $\mathcal{L}$. Conclure à l'aide de P_6.

Pour montrer la liberté de $(\mathrm{M}_0, \mathrm{M}_1)$, considérer une relation de dépendance linéaire entre ces deux matrices, puis l'appliquer à x_1 pour conclure.

II.B Pour établir l'existence de α et z, utiliser la première partie de la question pour en déduire que $\mathrm{M}_0\mathrm{N}_0$ induit un endomorphisme de $\mathrm{M}_0(\mathrm{V})$. Ce dernier admet alors une valeur propre.

En déduire que le noyau de $\mathrm{M}_1 - \alpha\mathrm{M}_0$ contient strictement le noyau de M_0, pour obtenir que son rang est strictement inférieur à celui de M_0.

Partie III

III.A Raisonner matriciellement.

III.B.1 Utiliser la relation de Grassman pour obtenir le résultat demandé sur l'intersection de $\mathcal{H}$ et $\mathcal{L}$. Considérer alors un élément de cette intersection et montrer qu'il est inversible, par exemple en calculant son déterminant.

III.C Utiliser le fait que dans un espace vectoriel de dimension finie p, toute famille de $p+1$ vecteurs est liée.

III.D Utiliser les résulats de cours concernant un endomorphisme L et son adjoint ${}^t\overline{\mathrm{L}}$ sur un espace hermitien : notamment le fait qu'un sous-espace vectoriel d'un espace hermitien est stable par L si et seulement si son orthogonal est stable par ${}^t\overline{\mathrm{L}}$.

I. Étude de quelques exemples

I.A.1 Donnons-nous x et y non nuls dans V. Le théorème de la base incomplète nous permet de compléter la famille (x) en une base de V :

$$(x, x_2, \ldots, x_n)$$

De même, on peut compléter (y) en une base de V :

$$(y, y_2, \ldots, y_n)$$

Notons a l'endomorphisme de V, qui envoie x sur y et x_i sur y_i pour i dans $\{2, \ldots, n\}$. On sait que cela suffit pour déterminer a, puisqu'un endomorphisme d'un espace vectoriel est entièrement déterminé par les images des vecteurs d'une base. En outre, a est inversible, puisqu'il transforme une base en une base. Par conséquent, sa matrice A relativement à la base canonique de V est inversible et vérifie $\mathrm{A}x = y$.

$$\boxed{\forall y \in \mathrm{V} \quad \exists \mathrm{A} \in \mathcal{L} \qquad \mathrm{A}x = y}$$

> Dans ce qui précède, on ne s'est pas servi de l'indication donnée par l'énoncé. Donnons tout de même une solution utilisant cette indication.
>
> **Si x et y forment une famille liée,** alors il existe α complexe non nul, tel que
>
> $$y = \alpha x$$
>
> L'homothétie A de rapport α constitue alors un endomorphisme de V, inversible car α n'est pas nul, tel que $\mathrm{A}x = y$.
>
> **Si x et y forment une famille libre,** alors on peut compléter (x, y) en une base de V
>
> $$(x, y, x_3, \ldots, x_n)$$
>
> et il suffit de considérer la matrice de passage A de cette base à la base
>
> $$(y, x, x_3, \ldots, x_n)$$

Utilisons ceci pour en déduire que la propriété P_6 est vérifiée. Soit W un sous-espace vectoriel de V, qui ne soit pas V ou $\{0\}$. Alors il existe x non nul dans W. Comme W est strictement inclus dans V, il existe y non nul, qui ne soit pas dans W. D'après ce qui précède, il existe A dans $\mathcal{L}$, tel que $\mathrm{A}x = y$: l'image de W par A contient donc y, qui n'est pas dans W. Ce qui établit que W n'est pas stable par $\mathcal{L}$. Les seuls sous-espaces vectoriels de V qui sont stables par $\mathcal{L}$ sont donc $\{0\}$ et V.

$$\boxed{\mathcal{L} \text{ vérifie la propriété } \mathrm{P}_6.}$$

I.A.2 Voyons lesquelles des propriétés P_1 à P_5 sont vérifiées par $\mathcal{L}$:

- **$\mathcal{L}$ ne vérifie pas P_1** : en effet, $\mathcal{L}$ est précisément l'ensemble des matrices inversibles, donc de rang n, et ne contient aucune matrice de rang 1.
- **$\mathcal{L}$ vérifie P_2 et P_3** puisque $\mathcal{L}$ contient l'identité qui est de rang n.
- **$\mathcal{L}$ ne vérifie pas P_4** : en effet, I et $-\mathrm{I}$ sont dans $\mathcal{L}$, mais leur somme, qui est 0, ne s'y trouve pas. $\mathcal{L}$ n'est donc pas stable par combinaison linéaire.

- **$\mathcal{L}$ vérifie $\mathbf{P_5}$** : en effet, c'est un résultat de cours que le produit de deux matrices carrées inversibles A et B est inversible. On le vérifie aisément en remarquant que
$$\left(\mathrm{B}^{-1}\mathrm{A}^{-1}\right)(\mathrm{AB}) = \mathrm{I} \quad \text{et que} \quad (\mathrm{AB})\left(\mathrm{B}^{-1}\mathrm{A}^{-1}\right) = \mathrm{I}$$
ce qui montre que AB est inversible, d'inverse $(\mathrm{AB})^{-1} = \mathrm{B}^{-1}\mathrm{A}^{-1}$.

I.B.1 Soit T dans $\mathcal{L}$. Cette matrice est de la forme :
$$\mathrm{T} = \begin{pmatrix} t_{1,1} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ t_{n-1,1} & & t_{n-1,n-1} & 0 \\ t_{n,1} & \cdots & t_{n,n-1} & t_{n,n} \end{pmatrix}$$
On sait que l'image de e_n est donnée par la n^{e} colonne de T, c'est-à-dire que
$$\mathrm{T}e_n = t_{n,n}e_n$$
Donc e_n est vecteur propre de T. Par conséquent, la droite engendrée par e_n est stable par T. Ceci étant vrai pour tout T dans $\mathcal{L}$, il s'ensuit que $\mathrm{Vect}(e_n)$ est stable par $\mathcal{L}$. Comme on a supposé n supérieur à deux, cette droite n'est pas égale à V. Elle n'est en outre pas réduite à $\{0\}$ puisqu'elle contient e_n qui n'est pas nul. Il s'ensuit que :
$$\boxed{\mathcal{L} \text{ ne vérifie pas la propriété } \mathrm{P}_6.}$$

I.B.2 Voyons lesquelles des propriétés P_1 à P_5 sont vérifiées par $\mathcal{L}$:

- **$\mathcal{L}$ vérifie $\mathbf{P_1}$** : en effet, la matrice
$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
est triangulaire inférieure et de rang 1.
- **$\mathcal{L}$ vérifie $\mathbf{P_2}$ et $\mathbf{P_3}$** puisque $\mathcal{L}$ contient l'identité, qui est triangulaire inférieure de rang n.
- **$\mathcal{L}$ vérifie $\mathbf{P_4}$** : c'est un résultat classique de cours que les matrices triangulaires inférieures forment un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
- **$\mathcal{L}$ vérifie $\mathbf{P_5}$** : on considère pour cela deux matrices triangulaires inférieures
$$\mathrm{T} = (t_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \quad \text{et} \quad \mathrm{T}' = ({t_{i,j}}')_{1\leqslant i,j\leqslant n}$$
Montrons que le produit TT′ a tous ses termes surdiagonaux nuls. On se donne i et j deux entiers, tels que
$$2 \leqslant i < j \leqslant n-1$$
Le terme situé à l'intersection de la i^{e} ligne et de la j^{e} colonne vaut, d'après les règles du produit matriciel :
$$(\mathrm{TT}')_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} t_{i,k}{t_{k,j}}' = \sum_{k=1}^{i} t_{i,k}{t_{k,j}}' + \sum_{k=i+1}^{n} t_{i,k}{t_{k,j}}'$$