CCP Maths 2 PC 2001 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Xavier Goaoc (ENS Cachan) ; il a été relu par David Lecomte (ENS Cachan) et Vincent Beck (ENS Cachan).

Ce sujet étudie l'équation différentielle **de Bessel** :

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - \lambda^2)y = 0 \quad \text{où } \lambda \in \mathbb{R}$$

- La première partie introduit une famille de fonctions (connues sous le nom de **coefficients de Bessel**) définies par des intégrales dépendant d'un paramètre. Après avoir étudié leur parité et leur régularité, on montre qu'elles sont solutions de l'équation de Bessel pour des valeurs entières de λ.
- La deuxième partie, plus calculatoire, décompose en séries entières les fonctions introduites en première partie. On en déduit des formules sommatoires sur les coefficients de Bessel.
- La troisième partie traite le cas général de l'équation de Bessel. On la réduit à une autre équation différentielle, dont on cherche les solutions sous forme de série entière.

Indications

Première partie

I.1 Penser à faire un changement de variable $u = \pi - t$ dans $\mathrm{J}_n(x)$.

I.2 Exprimer $\mathrm{J}_{-n}(x)$ en fonction de $\mathrm{J}_n(-x)$ et utiliser la question précédente.

I.3 Appliquer le théorème de dérivation sous le signe somme.

I.4 Intégrer $\mathrm{J}'_n(x)$ par parties (en intégrant le $\sin(nt - x\sin t)$).

Deuxième partie

II.1 Développer $\cos(nt - x\sin t)$ et scinder les intégrales obtenues en $\dfrac{\pi}{2}$.

II.2 Utiliser la question II.1 et le théorème d'interversion entre série et intégrale (penser à la convergence normale pour montrer la convergence uniforme).

II.3.1 Pour linéariser $\sin^{2k} x$ développer $\left(\dfrac{e^{it} - e^{-it}}{2i}\right)^{2k}$ et regrouper les termes d'exposants opposés. Cette question est assez calculatoire.

II.3.2 Procéder comme à la question II.3.1 ou se servir du résultat obtenu à la question II.3.1 et utiliser l'identité remarquable

$$\cos a \sin b = \frac{1}{2}\left(\sin(a+b) - \sin(a-b)\right)$$

II.4.1 Scinder l'intégrale définissant les coefficients de Fourier en π et opérer un changement de variable $u = t - \pi$ dans la deuxième partie.

II.4.2 Particulariser les relations obtenues à la question II.4.1 ; utiliser l'égalité de Parseval.

Troisième partie

III.1.2 Utiliser la question III.1.1 pour trouver la solution de (B_λ).

III.1.3 Remarquer que $(\mathrm{B}_\lambda) = (\mathrm{B}_{-\lambda})$.

III.3.1 Observer les limites de $j_\lambda(x)$ et $j_{-\lambda}(x)$ quand x tend vers 0 par valeurs positives.

III.3.2 Pour comparer j_n et J_n utiliser leurs développements respectifs en série entière. Pour montrer que z_{-n} est solution de $({\mathrm{B}_{-n}}')$, penser à utiliser la question III.1.1.

Première partie

I.1 Pour tout réel x la fonction $t \mapsto \cos(nt - x\sin t)$ est continue sur $[0, \pi]$. Elle est donc intégrable sur $[0, \pi]$ et $\mathrm{J}_n(x)$ est bien définie.

Étudions maintenant la parité de J_n. Fixons $x \in \mathbb{R}$ et opérons le changement de variable $u = \pi - t$ pour obtenir :

$$\begin{aligned}
\mathrm{J}_n(-x) &= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(nt + x\sin t)\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(n\pi - nu + x\sin(\pi - u))\,\mathrm{d}u \\
\mathrm{J}_n(-x) &= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(n\pi - (nu - x\sin u))\,\mathrm{d}u
\end{aligned}$$

On distingue alors deux cas :

- n est pair et $\mathrm{J}_n(-x) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^\pi \cos(-(nu - x\sin u))\,\mathrm{d}u = \mathrm{J}_n(x)$
- n est impair et $\mathrm{J}_n(-x) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^\pi \cos(\pi - nu - x\sin u)\,\mathrm{d}u = -\mathrm{J}_n(x)$

Donc $\boxed{\mathrm{J}_n \text{ est paire si } n \text{ est pair et impaire si } n \text{ est impair.}}$

I.2 Commençons par exprimer J_{-n} en fonction de J_n. Pour tout réel x on a

$$\mathrm{J}_{-n}(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(-nt - x\sin t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(nt - (-x)\sin t)\,\mathrm{d}t$$

soit
$$\mathrm{J}_{-n}(x) = \mathrm{J}_n(-x)$$

En utilisant la question I.1 on a donc :

$$\mathrm{J}_{-n}(x) = \begin{cases} \mathrm{J}_n(x) & \text{si } n \text{ est pair} \\ -\mathrm{J}_n(x) & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

ce que l'on résume par

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \qquad \mathrm{J}_{-n}(x) = (-1)^n \mathrm{J}_n(x)}$$

I.3 Pour tout entier n et quel que soit k, la fonction $(x, t) \mapsto \cos(nt - x\sin t)$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur $\mathbb{R} \times [\,0\,;\pi\,]$. Puisque $[\,0\,;\pi\,]$ est un segment, on peut appliquer le théorème de dérivation sous le signe somme et on obtient que J_n est de classe $\mathcal{C}^k$.

$$\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{Z},\ \mathrm{J}_n \text{ est donc de classe } \mathcal{C}^\infty \text{ sur } \mathbb{R}.}$$

Alors, $\qquad \forall n \in \mathbb{Z} \quad \forall x \in \mathbb{R} \qquad {\mathrm{J}_n}^{(k)}(x) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^\pi \dfrac{\partial^k}{\partial x^k}(\cos(nt - x\sin t))\,\mathrm{d}t$

I.4 Fixons $x \in \mathbb{R}$ et commençons par calculer $\mathrm{J}_n{}'(x)$ en utilisant la formule obtenue à la question I.3 :

$$\mathrm{J}_n{}'(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin t \sin(nt - x\sin t)\,\mathrm{d}t \qquad (\mathbf{1})$$

Puis intégrons par parties pour faire apparaître le terme $\cos(nt - x\sin t)$ (on intègre $\sin t$ et on dérive $\sin(nt - x\sin t)$) :

$$\mathrm{J}_n{}'(x) = -\frac{1}{\pi}\left[\cos t \sin(nt - x\sin t)\right]_0^{\pi} + \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos t (n - x\cos t)\cos(nt - x\sin t)\,\mathrm{d}t$$

et comme $$\left[\cos t \sin(nt - x\sin t)\right]_0^{\pi} = 0$$

on a bien $$\boxed{\mathrm{J}_n{}'(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} (\cos t)(n - x\cos t)\cos(nt - x\sin t)\,\mathrm{d}t} \qquad (\mathbf{2})$$

La fonction $(x,t) \mapsto \sin t \sin(nt - x\sin t)$ est elle aussi de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R} \times [\,0\,;\pi\,]$ et $[\,0\,;\pi\,]$ est un segment fermé. On peut donc calculer $\mathrm{J}_n{}''(x)$ en dérivant $(\mathbf{1})$ sous l'intégrale :

$$\mathrm{J}_n{}''(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} -\sin^2 t \cos(nt - x\sin t)\,\mathrm{d}t$$

Et vérifions maintenant que J_n vérifie l'équation (B_n) :

$$\begin{aligned}
&x^2\mathrm{J}_n{}''(x) + x\mathrm{J}_n{}'(x) + (x^2 - n^2)\mathrm{J}_n(x) \\
&\qquad = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} (-x^2\sin^2 t + x\cos t(n - x\cos t) + x^2 - n^2)\cos(nt - x\sin t)\,\mathrm{d}t \\
&\qquad = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} (x^2(1 - \cos^2 t - \sin^2 t) - n(n - x\cos t)\cos(nt - x\sin t))\,\mathrm{d}t \\
&\qquad = -\frac{n}{\pi}\int_0^{\pi} (n - x\cos t)\cos(nt - x\sin t)\,\mathrm{d}t \\
&\qquad = -\frac{n}{\pi}\left[\sin(nt - x\sin t)\right]_o^{\pi} \\
&\qquad = 0
\end{aligned}$$

Donc $$\forall x \in \mathbb{R} \qquad x^2\mathrm{J}_n{}''(x) + x\mathrm{J}_n{}'(x) + (x^2 - n^2)\mathrm{J}_n(x) = 0$$

et finalement $\boxed{\mathrm{J}_n \text{ vérifie l'équation différentielle } (\mathrm{B}_n) \text{ sur } \mathbb{R}.}$

> La première partie de la question a pour but d'exprimer $\mathrm{J}_n{}'(x)$ comme une intégrale dans laquelle apparaît le terme $\cos(nt - x\sin t)$. Calculer $\mathrm{J}_n{}''(x)$ en partant de $(\mathbf{2})$, plutôt que de $(\mathbf{1})$ comme nous l'avons fait, serait maladroit ; cela conduirait en effet à une nouvelle intégration par parties pour montrer que
>
> $$x^2\mathrm{J}_n{}''(x) + x\mathrm{J}_n{}'(x) + (x^2 - n^2)\mathrm{J}_n(x) = 0$$