CCP Maths 1 PC 2001 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Alexander Gewirtz (ENS Lyon) et Thomas Chomette (ENS Ulm) ; il a été relu par Benoît Chevalier (ENS Ulm) et David Lecomte (ENS Cachan).

Ce problème d'algèbre linéaire comporte deux parties.

- La première partie commence par des rappels et des questions sur les matrices symétriques réelles. Ensuite, on cherche à déterminer, pour $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ donnée, une décomposition en valeurs singulières. On démontre également des relations classiques entre les noyaux et images de A et de ${}^t\mathrm{A}$.
- La deuxième partie de ce sujet introduit la notion de pseudo-inverse d'une matrice. Le but de cette partie est d'étudier ce pseudo-inverse et de montrer que celui-ci est bien défini. Enfin, pour finir, on illustre l'intérêt du pseudo-inverse d'une matrice sur un problème d'optimisation dans $\mathbb{R}^2$: on peut calculer facilement le projeté orthogonal d'un vecteur sur l'image de la matrice.

Indications

Partie I

I.2 Utiliser le théorème de réduction des matrices symétriques réelles.

I.3.b Utiliser le fait que $\langle \mathrm{A}x, y\rangle_n = \langle x, {}^t\mathrm{A}\, y\rangle_p$.

I.4.a Attention à l'erreur dans l'énoncé. Pour le produit par blocs, il faut lire $-x\mathrm{I}_p$ dans la deuxième matrice, et non I_p.

I.4.b Le déterminant est invariant par transposition.

I.5 Utiliser la relation entre les polynômes caractéristiques obtenue à la question I.4.b.

I.6.a A est supposée non nulle.

I.6.b Constater que $r = \mathrm{rg}\,({}^t\mathrm{A}\,\mathrm{A})$ et utiliser le théorème du rang.

I.6.c Calculer $\|\mathrm{AV}_i\|^2$.

I.6.d Remplacer U_i par $\mu_i^{-1}\mathrm{AV}_i$. V_i est un vecteur propre de ${}^t\mathrm{A}\,\mathrm{A}$.

I.6.e Calculer $\|{}^t\mathrm{A}\,\mathrm{U}_i\|^2$.

I.6.f Regarder d'abord $(\mathrm{U}_1, \ldots, \mathrm{U}_r)$ puis montrer que les deux familles sont orthogonales.

I.7.b Les matrices U et V sont orthogonales.

I.9.a Vérifier que les applications linéaires coïncident sur la base de $\mathbb{R}^p$.

I.9.b Utiliser la décomposition de A obtenue à la question I.7.b et celle de V obtenue à la question I.9.a.

I.9.c Utiliser les questions I.6.d, e et f. $(\mathrm{U}_1, \ldots, \mathrm{U}_n)$ et $(\mathrm{V}_1, \ldots, \mathrm{V}_p)$ sont des bases orthonormales.

Partie II

II.3 Calculer l'image des bases canoniques.

II.4 U et V sont orthogonales.

II.5 Imiter la méthode des questions I.9.a et I.9.b.

II.6.a Utiliser la décomposition de AA^+ obtenue à la question II.5.

II.6.b Combiner les résultats des questions II.5 et I.9.c.

II.7 Utiliser les résultats des questions II.6.b et II.5.

II.9.b Utiliser la question II.5 et montrer que B et A^+ coïncident sur la base $(\mathrm{U}_1, \ldots, \mathrm{U}_n)$: distinguer les cas $i \leqslant r$ et $i > r$.

II.10 Utiliser les questions I.9.b et II.5 puis substituer A^+ à A.

II.12.a Pour un projecteur p, $\mathrm{Im}\,(p - \mathrm{id}\,) = \mathrm{Ker}\,(p)$ puis utiliser les résultats de la question II.8 ainsi que Pythagore.

II.12.b Évaluer l'expression du théorème de Pythagore en $\mathrm{X} = \mathrm{H}'$.

II.12.c La borne inférieure est atteinte en $\overline{\mathrm{H}}$.

Partie I

I.1 Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. Montrons que ${}^t\mathrm{A}\,\mathrm{A}$ est nulle si et seulement si A est nulle.

- Supposons A nulle. Alors il est clair que ${}^t\mathrm{A}\,\mathrm{A}$ est nulle.
- Réciproquement, si la matrice ${}^t\mathrm{A}\,\mathrm{A}$ est nulle, ses coefficients diagonaux sont en particulier nuls. Or si l'on désigne par $a_{i,j}$ le terme général de la matrice A, le coefficient diagonal (i,i) de la matrice ${}^t\mathrm{A}\,\mathrm{A}$ n'est autre que :
$$\sum_{k=1}^{n} {a_{k,i}}^2$$
Leur nullité implique donc la nullité de tous les termes $a_{k,i}$. A est alors la matrice nulle.

Ainsi $$\boxed{{}^t\mathrm{A}\,\mathrm{A} = 0 \iff \mathrm{A} = 0}$$

> Nous n'avons utilisé pour montrer que A est nulle que les coefficients diagonaux de ${}^t\mathrm{A}\,\mathrm{A}$. Une hypothèse en apparence plus faible serait de supposer simplement que la matrice ${}^t\mathrm{A}\,\mathrm{A}$ est de trace nulle. Cela suffit bien entendu pour conclure, vu que :
> $$\mathrm{Tr}\left({}^t\mathrm{A}\,\mathrm{A}\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p} a_{i,j}^2$$
> Une autre preuve, utilisant la structure euclidienne de $\mathbb{R}^p$, consiste à dire que : si ${}^t\mathrm{A}\,\mathrm{A}$ est nulle, alors pour tout $x \in \mathbb{R}^p$, ${}^t\mathrm{A}\,\mathrm{A}x = 0$.
> Donc pour tout $x \in \mathbb{R}^p$, ${}^tx\,{}^t\mathrm{A}\,\mathrm{A}x = 0$, soit pour tout $x \in \mathbb{R}^p$, ${}^t(\mathrm{A}x)\,\mathrm{A}x = 0$.
>
> C'est-à-dire $$\forall x \in \mathbb{R}^p \quad \|\mathrm{A}x\|^2 = 0$$
> Soit encore pour tout $x \in \mathbb{R}^p$, $\mathrm{A}x = 0$ et donc $\mathrm{A} = 0$.
> Cette preuve, quoique plus élegante que celle mettant en oeuvre le calcul des coefficients de ${}^t\mathrm{A}\,\mathrm{A}$, utilise cependant le résultat demandé à la question I.3.a. C'est pourquoi nous ne la présentons qu'en remarque.

I.2 Dans toute la suite on suppose A non nulle.

Les matrices ${}^t\mathrm{A}\,\mathrm{A}$ et $\mathrm{A}\,{}^t\mathrm{A}$ sont toutes deux des matrices symétriques réelles. Par conséquent :

$$\boxed{{}^t\mathrm{A}\,\mathrm{A} \text{ et } \mathrm{A}\,{}^t\mathrm{A} \text{ sont diagonalisables au moyen de matrices orthogonales.}}$$

I.3.a Soient X, Y deux éléments de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Soient $(x_1, \ldots, x_n)$ et $(y_1, \ldots, y_n)$ les coordonnées respectives de X et Y dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$. On a alors par définition du produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$:
$$\langle \mathrm{X}, \mathrm{Y}\rangle_n = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k$$
Or, en identifiant $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ et $\mathbb{R}$, il vient ${}^t\mathrm{X}\,\mathrm{Y} = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k$. Ainsi, on a

$$\boxed{\langle \mathrm{X}, \mathrm{Y}\rangle_n = {}^t\mathrm{X}\,\mathrm{Y}}$$

I.3.b Soit W un vecteur propre de ${}^t\mathrm{A}\,\mathrm{A}$ associé à la valeur propre λ. On a :

$$\|\mathrm{AW}\|^2 = \langle \mathrm{AW}, \mathrm{AW}\rangle_n = \langle \mathrm{W}, {}^t\mathrm{A}\,\mathrm{AW}\rangle_p = \langle \mathrm{W}, \lambda \mathrm{W}\rangle_p = \lambda \|\mathrm{W}\|^2$$

Par conséquent, $$\boxed{\|\mathrm{AW}\|^2 = \lambda \|\mathrm{W}\|^2}$$

I.3.c Soient λ une valeur propre de ${}^t\mathrm{A}\,\mathrm{A}$ et W un vecteur propre non nul associé à la valeur propre λ.

D'après la question I.3.b, on a $\|\mathrm{AW}\|^2 = \lambda \|\mathrm{W}\|^2$. Or W est non nul, donc $\|\mathrm{W}\| \neq 0$.

Par suite, $$\lambda = \frac{\|\mathrm{AW}\|^2}{\|\mathrm{W}\|^2}$$

Donc λ est un réel positif.

Ainsi $$\boxed{\forall \lambda \in \mathrm{sp}({}^t\mathrm{A}\,\mathrm{A}) \quad \lambda \in \mathbb{R}_+}$$

I.4.a Soit x un réel. Alors :

$$\boxed{\begin{pmatrix} x\mathrm{I}_n & \mathrm{A} \\ {}^t\mathrm{A} & \mathrm{I}_p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\mathrm{I}_n & 0 \\ {}^t\mathrm{A} & -x\mathrm{I}_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{A}\,{}^t\mathrm{A} - x\mathrm{I}_n & -x\mathrm{A} \\ 0 & -x\mathrm{I}_p \end{pmatrix}}$$

De même, on a :

$$\boxed{\begin{pmatrix} x\mathrm{I}_n & \mathrm{A} \\ {}^t\mathrm{A} & \mathrm{I}_p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\mathrm{I}_n & \mathrm{A} \\ 0 & -x\mathrm{I}_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x\mathrm{I}_n & 0 \\ -{}^t\mathrm{A} & {}^t\mathrm{A}\,\mathrm{A} - x\mathrm{I}_p \end{pmatrix}}$$

I.4.b On constate que :

$$\begin{pmatrix} -\mathrm{I}_n & 0 \\ {}^t\mathrm{A} & -x\mathrm{I}_p \end{pmatrix} = {}^t\begin{pmatrix} -\mathrm{I}_n & \mathrm{A} \\ 0 & -x\mathrm{I}_p \end{pmatrix}$$

Par conséquent, ces deux matrices carrées ont même déterminant. Ainsi :

$$\left| \begin{pmatrix} x\mathrm{I}_n & \mathrm{A} \\ {}^t\mathrm{A} & \mathrm{I}_p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\mathrm{I}_n & 0 \\ {}^t\mathrm{A} & -x\mathrm{I}_p \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} x\mathrm{I}_n & \mathrm{A} \\ {}^t\mathrm{A} & \mathrm{I}_p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\mathrm{I}_n & \mathrm{A} \\ 0 & -x\mathrm{I}_p \end{pmatrix} \right|$$

Soit $$\begin{vmatrix} \mathrm{A}\,{}^t\mathrm{A} - x\mathrm{I}_n & -x\mathrm{A} \\ 0 & -x\mathrm{I}_p \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -x\mathrm{I}_n & 0 \\ -{}^t\mathrm{A} & {}^t\mathrm{A}\,\mathrm{A} - x\mathrm{I}_p \end{vmatrix}$$

Par conséquent $$(-\mathrm{X})^p \chi_{\mathrm{A}\,{}^t\mathrm{A}}(\mathrm{X}) = (-\mathrm{X})^n \chi_{{}^t\mathrm{A}\,\mathrm{A}}(\mathrm{X})$$

où χ est le polynôme caractéristique.

Soit $$\boxed{(-\mathrm{X})^p \prod_{\lambda \in \mathrm{sp}(\mathrm{A}\,{}^t\mathrm{A})} (\mathrm{X} - \lambda)^{\omega_\lambda} = (-\mathrm{X})^n \prod_{\lambda \in \mathrm{sp}({}^t\mathrm{A}\,\mathrm{A})} (\mathrm{X} - \lambda)^{\omega'_\lambda}}$$