

X Physique et Chimie 2 MP 2001 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Fabien Guérin (École Polytechnique) ; il a été relu par Jean-David Picon (École Polytechnique) et Sébastien Taillemite (École Nationale Supérieure de Chimie de Paris).

Ce problème propose d'étudier différentes méthodes de traitement des eaux de rivière afin de les rendre propres à la consommation. Divers procédés physico-chimiques sont utilisés en fonction de la taille des particules à éliminer, les particules les plus grosses étant par exemple ôtées par filtration.

La première partie du problème traite le cas de la purification des eaux en bassin par décantation. Dans une eau au repos, les particules d'une taille supérieure à dix micromètres peuvent en effet se déposer au fond du bassin et sont alors facilement éliminables. Pour les particules plus petites (inférieures à quelques micromètres), la décantation n'est pas possible car elles portent des charges en surface. La suite de cette partie montre comment il est possible, par adjonction d'ions de charge opposée, de faire coaguler ces particules de manière à ce que les agrégats formés puissent décanter.

Les autres molécules, pour lesquelles la décantation est inefficace, sont traitées par du charbon actif. Les molécules peuvent se fixer à la surface du charbon dans des sites favorables. La cinétique de ce phénomène d'adsorption moléculaire est étudié dans la deuxième partie. Enfin, la dernière partie du problème détaille le principe d'un traitement chimique de minéralisation des eaux afin de les amener à l'équilibre de calcification.

Les trois parties sont indépendantes. Toutefois, il y a une nette différence entre la première partie, assez calculatoire et principalement axée sur l'électromagnétisme, et les deux autres parties qui nécessitent une bonne connaissance de la chimie minérale et de la cinétique chimique.

Indications

Partie I

I.2.b Il est nécessaire de calculer le facteur de proportionnalité entre le nombre volumique d'ions positifs ou négatifs et le facteur de Boltzmann. Pour cela, il faut utiliser la définition de n .

I.3.b Calculer $E(x) = -\frac{dV(x)}{dx}$ et utiliser $\|E(0)\| = \frac{\sigma}{\varepsilon}$.

I.4.a Il faut multiplier l'équation obtenue à la question I.2.b par $\frac{dV}{dx}$ et intégrer entre x et $+\infty$.

I.5.a Séparer les variables x et $V(x)$ et intégrer de 0 à x .

I.6.a Il faut introduire et étudier sur $[0; +\infty[$ la fonction auxiliaire :

$$x \mapsto \frac{x^3}{2} \exp(-x)$$

I.6.b La position stable du système est située en $x = 0$. L'énergie du système étant constante et strictement positive, il faut déterminer, selon la valeur de $\frac{A}{B}$, si le système a l'énergie suffisante pour atteindre cette position.

I.6.c Ne pas oublier que λ dépend de n .

Partie II

II.3 Attention aux unités pour calculer N !

II.4.a Séparer les cas $i = 1$ et $i > 1$.

II.4.c La somme de la série $\sum_{i=1}^{+\infty} i x^{i-1}$ s'obtient en dérivant celle de la série $\sum_{i=1}^{+\infty} x^i$.

Partie III

III.1.a Chercher deux équations d'inconnues $[H_3O^+]$ et $[CO_3^{2-}]$. Pour cela, utiliser l'équation d'électroneutralité de la solution et l'expression de K_1 et K_2 .

III.1.b Écrire l'équation d'électroneutralité de la solution.

III.1.c Dans le cas $pH = pK_1$, $[CO_3^{2-}]$ est négligeable devant $[HCO_3^-]$.

III.1.d Utiliser la même approximation qu'à la question précédente.

III.2.a Négliger $[CO_3^{2-}]$, $[H_3O^+]$ et $[OH^-]$ devant $[HCO_3^-]$ et $[H_2CO_3]$ et utiliser la relation :

$$K_S = [Ca^{2+}][CO_3^{2-}]$$

III.2.c Étudier la variation de $[Ca^{2+}]$ et $[CO_2]_{tot}$ lorsqu'on ajoute un réactif.

I. Purification par décantation en bassin

I.1.a Le solide plongé dans un liquide subit la poussée d'Archimède égale à l'opposé du poids du volume de liquide occupé par le solide, soit :

$$\vec{F}_{\text{Archimède}} = -\mu V \vec{g}$$

La particule est donc soumise à son poids et à la poussée d'Archimède, c'est-à-dire à la force :

$$\vec{F} = (\mu_{\text{sol}} - \mu) V \vec{g}$$

Si $\mu_{\text{sol}} > \mu$, \vec{F} est orientée selon $-\vec{e}_z$, la particule peut se déposer au fond du bassin de décantation.

I.1.b On prend dorénavant en compte la viscosité du fluide qui est à l'origine d'une force de frottement quand la particule est en mouvement.

Pour une grandeur physique A, on note [A] sa dimension et L, M, T et K les dimensions fondamentales de longueur, masse, temps et température.

Alors
$$[\nu] = \frac{[F_S]}{[\mu][R][v]} = \frac{MLT^{-2}}{ML^{-3} \times L \times LT^{-1}} = L^2 T^{-1}$$

$$\nu \text{ a pour dimension } L^2 T^{-1}.$$

Appliquons la relation fondamentale de la dynamique à la particule. Après projection sur l'axe Oz :

$$\frac{4}{3}\pi R^3 \mu_{\text{sol}} \frac{dv}{dt} = -6\pi\mu\nu Rv - (\mu_{\text{sol}} - \mu) \frac{4}{3}\pi R^3 g$$

soit
$$\frac{dv}{dt} + \frac{9}{2} \frac{\nu}{dR^2} v = \left(\frac{1}{d} - 1 \right) g$$

La solution de cette équation est constituée de deux termes :

- un terme exponentiellement décroissant qui est solution de l'équation

$$\frac{dv}{dt} + \frac{9}{2} \frac{\nu}{dR^2} v = 0$$

- un terme constant v_d solution particulière de l'équation différentielle.

Donc pour $t \gg \frac{2}{9} \frac{dR^2}{\nu}$, le premier terme peut être considéré comme nul, ce qui donne :

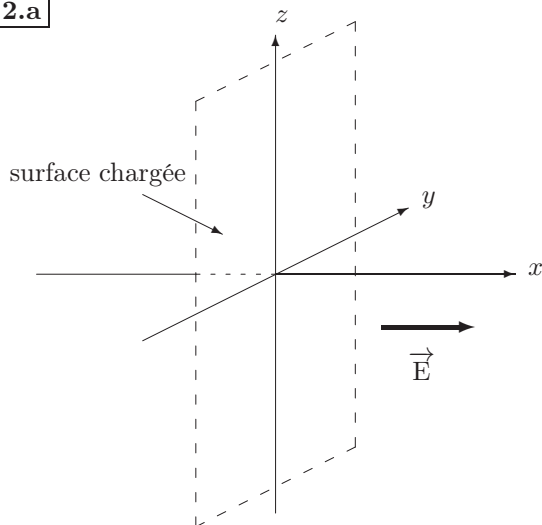
$$v_d = \frac{2}{9} gR^2 \frac{1-d}{\nu}$$

I.1.c On note t_{1m} le temps mis par une particule pour parcourir 1 m.

- Pour $R = 50 \mu\text{m}$: $v_d = -6,86 \cdot 10^{-3} \text{ m.s}^{-1}$ et $t_{1m} = 146 \text{ s}$;
- Pour $R = 5 \mu\text{m}$: $v_d = -6,86 \cdot 10^{-5} \text{ m.s}^{-1}$ et $t_{1m} = 14600 \text{ s}$;
- Pour $R = 0,5 \mu\text{m}$: $v_d = -6,86 \cdot 10^{-7} \text{ m.s}^{-1}$ et $t_{1m} = 1,46 \cdot 10^6 \text{ s}$.

Il faut donc environ deux minutes pour décanter des particules de $50 \mu\text{m}$ de rayon, quatre heures pour des particules de $5 \mu\text{m}$ et dix-sept jours pour des particules de $0,5 \mu\text{m}$! La décantation n'est donc réellement efficace que pour des particules de rayon assez grand, c'est-à-dire au-delà de $10 \mu\text{m}$ environ.

I.2.a



Le champ électrique $\vec{E}(x)$ est orienté selon \vec{e}_x c'est-à-dire dans le sens des potentiels décroissants.

$V(x)$ et $\rho(x)$ sont reliés par l'équation de Poisson :

$$\Delta V + \frac{\rho}{\varepsilon} = 0$$

soit

$$\frac{d^2 V(x)}{dx^2} + \frac{\rho}{\varepsilon} = 0$$

I.2.b La charge volumique créée par les ions de charge positive est :

$$\rho^+(x) = Z e n(x) = A Z e \exp\left(-\frac{Z e V(x)}{k_B T}\right)$$

où $n(x)$ désigne la densité volumique d'ions positifs à l'abscisse x et A est le facteur de proportionnalité entre $n(x)$ et le facteur de Boltzmann.

De même, la charge volumique créée par les ions de charge négative est :

$$\rho^-(x) = -Z e n(x) = -A Z e \exp\left(\frac{Z e V(x)}{k_B T}\right)$$

On a donc $\rho(x) = \rho^+(x) + \rho^-(x)$

$$= A Z e \left(\exp\left(-\frac{Z e V(x)}{k_B T}\right) - \exp\left(\frac{Z e V(x)}{k_B T}\right) \right)$$

$$\rho(x) = -2 A Z e \operatorname{sh}\left(\frac{Z e V(x)}{k_B T}\right)$$