Centrale Maths 1 MP 2001 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Sébastien Gadat (ENS Cachan) ; il a été relu par Vincent Perrier (ENS Lyon) et Vincent Puyhaubert (ENS Cachan).

Le but de ce problème est de déterminer le comportement des racines du polynôme tronqué P_n définissant l'exponentielle complexe lorsque le degré n du polynôme tend vers $+\infty$.

- La première partie étudie une courbe polaire définie implicitement comme étant la fonction réciproque d'une fonction étudiée préalablement (I.C).

  On constate alors que cette fonction vérifie une équation différentielle, que l'on établit à la question I.E ; la fin de la partie propose un tracé approché de la courbe polaire obtenue.
- La partie II utilise des outils classiques d'analyse (suites doubles sommables, formules de Taylor) pour démontrer des propriétés asymptotiques sur le module des $\xi_{n,k}$ définis à partir des racines du polynôme P_n.
- Parallèlement, pour achever l'étude du comportement asymptotique des $\xi_{n,k}$ on montre dans la troisième partie que les arguments des $\xi_{n,k}$ se répartissent uniformément sur $[\,0\,;2\pi\,]$. On dira alors que les arguments sont équirépartis.
- Enfin, la dernière partie, plus originale, propose de trouver un équivalent du nombre de racines de P_n dont la partie réelle est positive. Elle utilise astucieusement les résultats démontrés dans la partie précédente.

Indications

Partie I

I.C Utiliser la fonction u et remarquer que $r = u^{-1}(\cos)$.

I.D Justifier que l'on peut procéder par dichotomie.

I.E Utiliser astucieusement la formule de la question I.C ou appliquer le théorème de dérivation d'une composée de fonctions.

I.G Montrer que l'image de Γ est le cercle $\mathcal{C}\left(0, \dfrac{1}{e}\right)$.

Partie II

II.A Revenir à la définition des $\lambda_{n,k}$ et étudier le polynôme dérivé P'_n.

II.C.1 Appliquer le théorème de convergence dominée pour les séries rappelé dans l'énoncé.

II.D.2 Pour la limite de α_p, appliquer le théorème de convergence dominée pour les intégrales. Pour celle de β_p, encadrer $\ln \beta_p$ par des intégrales.

II.E.1 Appliquer la formule de Taylor avec reste intégral à la fonction $z \mapsto e^{zt}$ entre 0 et p.

II.E.2 Utiliser la formule de la question II.E.1 avec les $z_{n,k}$.

II.E.3 Raisonner par l'absurde et extraire de la sous-suite construite une sous-suite convergente ; aboutir ainsi à une contradiction avec la question II.E.2.

Partie III

III.A Utiliser le développement de Q_n en produit de monômes du premier degré ainsi que le développement en série entière de $\dfrac{1}{1-z}$.

III.B.1 Transformer l'égalité précédente et utiliser l'unicité du développement en série entière.

III.B.2 Pour la majoration des $\mathrm{S}_{n,p}$, utiliser le développement en série de $e^{-pz_{n,k}}$.

III.C.1 Revenir à la définition de la limite et utiliser la majoration obtenue à la question III.B.2 .

III.C.2 Utiliser le développement en série de Fourier de f et la relation entre la régularité de f et la vitesse de décroissance de ses coefficients de Fourier.

Partie IV

IV.A Raisonner de nouveau par l'absurde et procéder à une extraction. Utiliser alors la définition de r donnée à la question I.C pour obtenir une contradiction.

IV.B Appliquer le résultat de la question III.C.3 et remarquer que f est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

IV.C Utiliser la limite précédente avec une fonction « plateau » modifiée qui possède les propriétés de régularité voulues. Passer ensuite à la limite pour obtenir la fonction créneau et la formule finale.

I. Étude d'une courbe plane

I.A En écrivant $z = \rho e^{i\theta}$ on obtient directement l'expression trigonométrique de $\xi = ze^{-z}$:

$$\boxed{\xi = \rho e^{-\rho\cos\theta} e^{i(\theta-\rho\sin\theta)}}$$

I.B La fonction u est continue sur $]\,0\,;1\,]$ et dérivable sur $]\,0\,;1\,[$, de dérivée $u'(t) = -\dfrac{\ln t}{t^2}$ strictement positive sur $]\,0\,;1\,[$. Voici le tableau de ses variations :

t	0		1
u'	$\Vert$	$+$	
u	$\Vert$ $-\infty$	$\nearrow$	1

u est une bijection continue et strictement croissante de $]\,0\,;1\,]$ sur $]\,-\infty\,;1\,]$; par suite, u^{-1} est aussi continue et strictement croissante. On en déduit que u est un homéomorphisme croissant de $]\,0\,;1\,]$ sur $]\,-\infty\,;1\,]$.

Puisque u' ne s'annule pas sur $]\,0\,;1\,[$, u^{-1} est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]\,-\infty\,;1\,[$.

I.C La bijectivité de u entraîne :

$$\forall y \in\,]\,-\infty\,;1\,] \;\; \exists!\, t_y \in\,]\,0\,;1\,] \qquad y = u(t_y)$$

De plus, par définition de u, t_y vérifie $t_y e^{-yt_y} = 1/e$. En considérant le cas particulier $y = \cos\theta$, on conclut que :

$$\boxed{\forall \theta \in \mathbb{R}\ \exists!\, r(\theta) \in\,]\,0\,;1\,] \qquad r(\theta)e^{-r(\theta)\cos\theta} = \frac{1}{e}}$$

I.D On vérifie que $r(0) = 1$ et que $r\,(\pi/2) = 1/e$. En effet, ces deux valeurs satisfont l'égalité de la question I.C et ce sont les seules d'après l'unicité démontrée précédemment.

Pour calculer une valeur approchée de $r(\pi)$, il suffit de remarquer que $r(\pi) = u^{-1}(-1)$. On peut alors utiliser un algorithme de recherche dichotomique pour trouver une valeur approchée de $u^{-1}(-1)$ à 10^{-6} près en vertu de la croissance de u^{-1} :

$$\boxed{r(\pi) = 0,278464}$$

I.E La fonction r peut aussi s'écrire : $r = u^{-1} \circ \cos$ d'après la question I.C. On en déduit que r est continue, 2π-périodique et paire.

Sur $]\,0\,;2\pi\,[$, cos est de classe $\mathcal{C}^1$, à valeurs dans $[\,-1\,;1\,[$; par composition, r est aussi de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]\,0\,;2\pi\,[$.

Dérivons la formule $r(\theta) = u^{-1}(\cos\theta)$ par rapport à θ : $r'(\theta) = -(\sin\theta)w'(\cos\theta)$ avec $w = u^{-1}$. Par conséquent,

$$\boxed{\forall \theta \in\,]\,0\,;2\pi\,[\quad r'(\theta) = \frac{\sin\theta\, r(\theta)^2}{\ln(r(\theta))} = \frac{r^2\sin\theta}{r\cos\theta - 1}} \qquad (\mathbf{1})$$

I.F Pour tout $h > 0$, un calcul immédiat donne :

$$v(h) = \frac{-h - \ln(1-h)}{1-h}$$

Comme $\ln(1-h) = -h - \dfrac{h^2}{2} + \mathrm{o}\left(h^2\right)$, on en déduit que

$$\boxed{v(h) = \frac{h^2}{2} + \mathrm{o}\left(h^2\right)}$$

On remarque ensuite que $u(r(\theta)) = \cos\theta$. En posant $h(\theta) = 1 - r(\theta)$, la formule précédente se réécrit

$$1 - \cos\theta = v(h(\theta))$$

D'après l'étude effectuée aux questions I.C et I.D, $\lim\limits_{\theta\to 0} h(\theta) = 0$. De plus,

$$1 - \cos\theta = \frac{\theta^2}{2} + \mathrm{o}\left(\theta^2\right) \qquad \text{et} \qquad v(h(\theta)) = \frac{h(\theta)^2}{2} + \mathrm{o}\left(h(\theta)^2\right)$$

$h(\theta)$ étant toujours positif, $h(\theta) = \theta + \mathrm{o}\,(\theta)$, d'où le résultat annoncé :

$$\boxed{r(\theta) = 1 - \theta + \mathrm{o}\,(\theta)}$$

r est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]\,0\,;2\pi\,[$ et $\lim\limits_{\theta\to 0^+} r'(\theta) = -1$ d'après l'équivalent démontré précédemment ; r est donc prolongeable en une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[\,0\,;2\pi\,[$. Or la parité de r donne $\lim\limits_{\theta\to 0^-} r'(\theta) = 1$ et d'après sa 2π-périodicité, $\lim\limits_{\theta\to 2\pi^-} r'(\theta) = 1$: en conséquence, r est de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$.

> Cette question peut paraître déstabilisante dans la mesure où la fonction r est déjà $\mathcal{C}^1$ sur les intervalles $]\,2k\pi\,;2(k+1)\pi\,[$. Ici, il semble qu'il faille démontrer, en plus, que r admet des dérivées premières à gauche et à droite en chaque point $2k\pi$. Ainsi, au sens de l'énoncé, la fonction $\sqrt{|\cdot|}$ n'est pas $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$.

I.G Soit Γ la courbe d'équation polaire $\rho = r(\theta)$, c'est-à-dire

$$\Gamma = \left\{r(\theta)e^{i\theta} \mid \theta \in [\,0\,;2\pi\,]\right\}$$

Notons ϕ la fonction $z \mapsto ze^{-z}$ et cherchons $\phi(\Gamma)$:

$$\begin{aligned}\phi(\Gamma) &= \left\{r(\theta)e^{i\theta}e^{-r(\theta)e^{i\theta}} \mid \theta \in [\,0\,;2\pi\,]\right\}\\ &= \left\{r(\theta)e^{-r(\theta)\cos\theta}e^{i(\theta - \sin\theta\, r(\theta))} \mid \theta \in [\,0\,;2\pi\,]\right\}\end{aligned}$$