# CCP Maths 1 MP 2001 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Yacine Dolivet (ENS Ulm) ; il a été relu par Thomas Chomette (ENS Ulm) et Jean Starynkévitch (ENS Cachan).

Dans ce sujet on se propose de démontrer la version 2-dimensionnelle du fameux théorème de Brouwer qui affirme que toute application continue d'un convexe compact dans lui-même possède au moins un point fixe.

Dans une première partie assez classique, on établit l'existence et les propriétés de la projection sur les convexes. On aborde ensuite la démonstration proprement dite du théorème. La démarche adoptée consiste à étudier d'abord le cas des fonctions $\mathcal{C}^2$, puis à étendre l'existence d'un point fixe par densité à toutes les fonctions continues. Dans une dernière partie enfin, on établit quelques conséquences intéressantes du théorème ; plusieurs d'entre elles sont des exercices classiques dans l'esprit de ce qui pourrait tomber à l'oral. Il est donc judicieux d'assimiler les idées développées ici.

Outre le fait que le théorème de Brouwer semble devenir un thème à la mode, ce sujet, complet, fait de plus intervenir beaucoup de techniques classiques d'algèbre bilinéaire, d'analyse et de topologie. Bref, c'est un bon entraînement.

## Indications

**Mise en garde :** pour les questions 5 et 8, la résolution proposée ici s'écarte des suggestions de l'énoncé dans le seul souci pédagogique de mieux mettre en valeur les arguments à utiliser, qui restent les mêmes de toute façon.

### Partie I

1 Écrire l'identité du parallélogramme.

2 Quand F est compact $d_x : y \mapsto \|x-y\|$ possède un minimum sur F.

4 Développer $\|(x-\alpha)+(\alpha-y)\|^2$ et comparer à $\|x-\alpha\|^2$ .

5 Développer $\|x-(ty+(1-t)\mathrm{P}(x))\|^2 \geqslant \|x-\mathrm{P}(x)\|^2$ et comparer à $\|x-\mathrm{P}(x)\|^2$ .

7 Écrire $x-y=(x-\mathrm{P}(x))+(\mathrm{P}(x)-\mathrm{P}(y))+(\mathrm{P}(y)-y)$ .

8 Pour tout $x_0$ dans le segment $[\,x\,;\mathrm{P}(x)\,]$, on a

$$\|x-x_0\| = \|x-\mathrm{P}(x)\| - \|x_0-\mathrm{P}(x)\|$$

### Partie II

9 Montrer que le discriminant de l'équation du second degré en $\lambda$,

$$\|x+\lambda(x-f(x))\|^2 = 1$$

est strictement positif. D'autre part, la fonction racine est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$ .

10 Différencier la relation $\|\varphi(x)\| = 1$ et en déduire que l'image de la matrice jacobienne de $\varphi$ est incluse dans l'orthogonal de $\varphi(x)$ .

11.a $\psi(x,1)$ est la matrice étudiée dans la question précédente.

11.c $\alpha$ s'annule sur le cercle !

11.d Que vaut $\alpha$ sur le cercle ? Et que dire de la constance de J d'après la question 11.b ?

13 Écrire $f = \dfrac{1}{1+\varepsilon}f + \dfrac{\varepsilon}{1+\varepsilon}f$ et utiliser l'inégalité triangulaire.

14 Considérer une suite $(x_n)$ constituée de points fixes de $h_{1/n}$, montrer qu'elle a une valeur d'adhérence et montrer que celle-ci est point fixe de $f$ .

16.b Prouver que $h$ a un point fixe et montrer que celui-ci ne peut se trouver que dans A.

### Partie III

19 Montrer que $h$ est uniformément continue.

20.a Montrer que $g_{(r)}$ a un point fixe, et multiplier la relation $g_{(r)}(u_{(r)}) = u_{(r)}$ par $u_{(r)}$ .

20.b D'après la question d'avant $(y|u_{(r)}) \geqslant r\,\|y-f(u_{(r)})\|$. Utiliser alors l'inégalité de Schwarz à gauche et l'inégalité triangulaire à droite.

## I. Projection sur un convexe fermé de $\mathbb{R}^n$

**1** La première partie de cette question fait directement appel au cours, on redonne rapidement la démonstration. Soient deux vecteurs $x$ et $y$. Alors pour tout $t \in \mathbb{R}$ on a $\|x + t\,y\| \geqslant 0$, d'où, en prenant le carré et en développant

$$\|y\|^2\, t^2 + 2\,(x\,|\,y)\,t + \|x\|^2 \geqslant 0$$

Or, un polynôme du second degré en $t$ ne peut être toujours positif que si son discriminant (réduit) est négatif ou nul, ce qui s'écrit

$$(x\,|\,y)^2 \leqslant \|x\|^2\,\|y\|^2$$

D'où, en prenant la racine de cette inégalité

$$\boxed{|\,(x\,|\,y)\,| \leqslant \|x\|\,\|y\|} \qquad \text{(inégalité de Schwarz)}$$

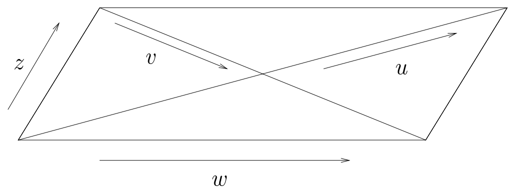
Dans le cas d'égalité, le discriminant s'annule et donc il existe une racine double $t_0$ vérifiant $\|x + t_0\,y\| = 0$. Les deux vecteurs sont alors colinéaires.

Pour montrer l'inégalité demandée, on se sert de la relation du parallélogramme

$$\|b-a\|^2 + \|c-a\|^2 = 2\left(\left\|a - \frac{b+c}{2}\right\|^2 + \|b-c\|^2\right)$$

D'où, avec les hypothèses de l'énoncé

$$\begin{aligned}\|b-a\|^2 &= \left\|a - \frac{b+c}{2}\right\|^2 + \|b-c\|^2 \\ &> \left\|a - \frac{b+c}{2}\right\|^2\end{aligned}$$




$\|w\|^2 + \|z\|^2 = 2(\|u\|^2 + \|v\|^2)$

avec $u = \dfrac{1}{2}(w+z)$ et $v = \dfrac{1}{2}(w-z)$. En prenant $w = b-a$ et $z = c-a$, on obtient la forme de la propriété du parallélogramme utilisée juste avant. Notons enfin qu'on aurait pu aboutir au résultat sans connaître cette relation. En effet, avec les hypothèses, si jamais $a-b$ et $a-c$ sont colinéaires, alors, puisqu'ils sont de même norme et que $b \neq c$, on a $a = (b+c)/2$ et l'inégalité est vraie, et s'ils ne le sont pas, l'inégalité de Schwarz écrite pour $a-b$ et $a-c$ est **stricte**. Alors, en élevant au carré l'inégalité suivante

$$\left\|a - \frac{b+c}{2}\right\| = \frac{1}{2}\|(a-b)+(a-c)\| \leqslant \frac{1}{2}(\|a-b\| + \|a-c\|)$$

et en utilisant cette inégalité stricte de Schwarz, on obtient le résultat.

**2** Ce qu'on cherche à montrer, c'est que la distance à un fermé de $\mathbb{R}^n$ est toujours atteinte.

Soient $x \in \mathbb{R}^n$ et F un fermé non vide de $\mathbb{R}^n$. Considérons $d_x : y \mapsto \|x - y\|$ l'application distance au point $x$ définie sur $\mathbb{R}^n$ ; elle est continue. Si F est borné, sa restriction ${d_x}_{|_\mathrm{F}}$ au compact F (on rappelle que dans $\mathbb{R}^n$ les fermés bornés sont **exactement** les compacts), admet un minimum qui est atteint en un certain $u \in \mathrm{F}$.

Si F n'est plus borné, on choisit $y_0$ dans F (F est non vide). On note $d = \|x - y_0\|$ et $\mathrm{B} = \overline{\mathrm{B}}(x, d)$ la boule fermée centrée en $x$ de rayon $d$. Alors $\mathrm{F} \cap \mathrm{B}$ étant compact et d'après ce qui vient d'être dit, il existe $u \in \mathrm{F} \cap \mathrm{B}$ minimisant ${d_x}_{|_{\mathrm{F}\cap\mathrm{B}}}$ et en particulier $\|x - y_0\| \geqslant \|x - u\|$. Mais alors, pour tout $y \in \mathrm{F}$,

- soit $\|x - y\| \leqslant \|x - y_0\|$ alors $y \in \mathrm{B}$ et donc $\|x - y\| \geqslant \|x - u\|$,
- soit $\|x - y\| > \|x - y_0\| \geqslant \|x - u\|$ de toute façon.

Ainsi $$\boxed{\forall y \in \mathrm{F} \quad \exists u \in \mathrm{F} \qquad \|x - y\| \geqslant \|x - u\|}$$

**3** Soit A un convexe fermé non vide. La question précédente établit l'existence de $u$. Il ne nous reste alors plus qu'à montrer qu'il est unique pour la propriété demandée.

Considérons donc un autre $v \in \mathrm{A}$ vérifiant la même chose. On a donc bien sûr $\|x - u\| \geqslant \|x - v\|$ et $\|x - v\| \geqslant \|x - u\|$, autrement dit

$$\|x - u\| = \|x - v\|$$

À présent, si on avait $u \neq v$, on aurait $\left\| x - \dfrac{u+v}{2} \right\| < \|x - u\|$ d'après la question 1. Mais ceci est absurde puisque A étant convexe, $\dfrac{u+v}{2}$ est dans A et donc nécessairement $\left\| x - \dfrac{u+v}{2} \right\| \geqslant \|x - u\|$.

> La meilleure façon de montrer l'importance de l'hypothèse de convexité est de considérer le cas où A est un cercle (non réduit à un point). Alors pour $x$ son centre, $u$ ne pourrait pas être moins unique puisqu'ici **tous** les élements de A sont équidistants de $x$ !

**4** Considérons $\alpha \in \mathrm{A}$ satisfaisant les hypothèses de l'énoncé et prenons $y$ quelconque dans A. Alors on a

$$\begin{aligned}
\|x - y\|^2 &= \|(x - \alpha) + (\alpha - y)\|^2 \\
&= \|x - \alpha\|^2 + \|\alpha - y\|^2 - 2\,(x - \alpha \,|\, y - \alpha) \\
\|x - y\|^2 &\geqslant \|x - \alpha\|^2
\end{aligned}$$

puisque tous les autres termes du membre de droite sont positifs selon l'hypothèse.