Centrale Maths 1 PSI 2000 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Thomas Chomette (ENS Ulm) ; il a été relu par Brice Goglin (ENS Lyon) et Pascal Delanoe (Mines Paris).

Ce problème assez calculatoire a pour but de trouver, par deux méthodes différentes, la valeur des intégrales :

$$\mathrm{I}_n = \int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin t}{t}\right)^n \mathrm{d}t$$

La première partie est consacrée au calcul de I_1 et la deuxième traite de généralités sur la suite $(\mathrm{I}_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Dans la troisième partie, on calcule I_n en utilisant $n-1$ intégrations par parties sucessives, combinées avec un résultat de linéarisation de $\sin^n t$.

Enfin, dans la quatrième partie, on introduit les fonctions :

$$\mathrm{A}_n : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\left(\frac{\sin xt}{t}\right)^n \mathrm{d}t$$

On montre que ces fonctions vérifient des équations différentielles faisant intervenir les I_n, et qui, en se résolvant de proche en proche, permettent de calculer explicitement les fonctions A_n, ainsi que les I_n.

Indications

- I.A Intégrer par parties.
- I.B.3 Utiliser la formule de trigonométrie donnant $\sin - \sin$, et utiliser la question I.A.
- I.C.2 Développer le numérateur et le dénominateur en série entière pour montrer que les deux fonctions sont de classe $\mathcal{C}^\infty$.
- I.C.3 Justifier l'existence des limites utilisées.
- I.C.4 Utiliser la relation de Chasles et la question I.A.
- II.B Intégrer par parties sur un segment.
- II.C Découper l'intégrale en trois morceaux : de 0 à ε, de ε à 1 et de 1 à $+\infty$ en majorant la fonction à intégrer de façon optimale à chaque fois.
- II.D Utiliser le critère de Leibniz.
- III.E.1 Raisonner par récurrence pour la première égalité, en utilisant la formule de Pascal : puis en déduire la deuxième en multipliant par $\sin t$.
- III.E.2 Dériver les formules précédentes $n-1$ fois par la formule de Leibniz.
- IV.B Utiliser le théorème de dérivation d'une intégrale dépendant d'un paramètre.
- IV.C.1 Chercher une solution particulière ayant la même forme que le second membre.
- IV.E Procéder comme à la question IV.C.1 .
- IV.F Raisonner par récurrence (après avoir corrigé l'énoncé). À chaque étape de la récurrence, raisonner comme dans les questions précédentes.

Partie I

I.A Par intégration par parties, on a pour $x > 0$:

$$\int_a^b f(t)\sin xt\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{f(t)\cos xt}{x}\right]_a^b + \frac{1}{x}\int_a^b f'(t)\cos xt\,\mathrm{d}t$$

et donc

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b f(t)\sin xt\,\mathrm{d}t\right| &\leqslant \frac{1}{x}\left|f(a)\cos ax - f(b)\cos xb + \int_a^b f'(t)\cos xt\,\mathrm{d}t\right|\\ &\leqslant \frac{1}{x}\left(2\sup_{t\in[\,a\,;b\,]}|f(t)| + (b-a)\sup_{t\in[\,a\,;b\,]}|f'(t)|\right).\end{aligned}$$

En effet, f étant de classe $\mathcal{C}^1$, f et f' sont continues et donc bien bornées sur tout segment (second théorème de Heine).

La majoration précédente nous donne bien, comme $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x} = 0$:

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}\int_a^b f(t)\sin xt\,\mathrm{d}t = 0}$$

Il s'agit d'un cas particulier du lemme de Lebesgue. En effet ce résultat s'étend à toute fonction intégrable sur $[\,a\,;b\,]$.

Il est évident lorsque f est constante, et donc lorsque f est une fonction en escalier. Or une fonction intégrable sur $[\,a\,;b\,]$ au sens de Riemann est limite uniforme d'une suite de fonctions en escaliers $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Si $\varepsilon > 0$, on a donc $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant n_0 \implies \|f - f_n\|_\infty \leqslant \varepsilon$. Mais alors, pour n fixé plus grand que n_0, on a :

$$\left|\int_a^b f(t)\sin xt\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \left|\int_a^b f_n(t)\sin xt\,\mathrm{d}t\right| + \int_a^b |f(t) - f_n(t)|\,\mathrm{d}t$$

Et pour x tel que $\left|\displaystyle\int_a^b f_n(t)\sin xt\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \varepsilon$, on obtient :

$$\left|\int_a^b f(t)\sin xt\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \varepsilon(1 + b - a)$$

et l'on a bien $$\lim_{x\to+\infty}\int_a^b f(t)\sin xt\,\mathrm{d}t = 0$$

I.B.1 En utilisant les équivalents de la fonction sinus, on a lorsque $t \to 0$:

$$\sin nt \sim nt \qquad \text{et} \qquad \sin t \sim t$$

donc
$$\lim_{t\to 0} \frac{\sin nt}{\sin t} = n$$

La fonction $t \mapsto \dfrac{\sin nt}{\sin t}$ est continue sur $\left]0\,;\dfrac{\pi}{2}\right]$ et se prolonge donc en une fonction continue sur $\left[0\,;\dfrac{\pi}{2}\right]$, sur lequel elle est intégrable.

I.B.2 On a immédiatement $\mathrm{J}_0 = 0$ et $\mathrm{J}_1 = \dfrac{\pi}{2}$.
Et comme $\sin 2t = 2\cos t \sin t$, on obtient :

$$\mathrm{J}_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\cos t \,\mathrm{d}t = 2$$

De même, on a $\sin 3t = \sin t\cos 2t + \cos t \sin 2t = \sin t(\cos 2t + 2\cos^2 t)$, et donc :

$$\mathrm{J}_3 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2t + 2\cos^2 t \,\mathrm{d}t$$

Or, par le changement de variable affine $t = \dfrac{\pi}{2} - u$, on remarque que :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t \,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t \,\mathrm{d}t$$

et comme $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t \,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}t = \frac{\pi}{4}$$

d'où
$$\mathrm{J}_3 = \left[\frac{1}{2}\sin 2t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$$

I.B.3 Rappelons la formule de trigonométrie :

$$\sin p - \sin q = 2\cos\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}$$

(Pour la retrouver, partir par exemple des formules donnant $\sin(a+b)$ et $\sin(a-b)$, les retrancher et faire le changement de variables $p = a+b$ et $q = a-b$, ou encore utiliser l'exponentielle complexe.)
On obtient alors :

$$\begin{aligned}
\mathrm{J}_n - \mathrm{J}_{n-2} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\,\frac{\cos\left(\left(\dfrac{n+n-2}{2}\right)t\right)\sin\left(\left(\dfrac{n-n+2}{2}\right)t\right)}{\sin t}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\cos((n-1)t)\,\mathrm{d}t \\
\mathrm{J}_n - \mathrm{J}_{n-2} &= \left[\frac{2}{n-1}\sin((n-1)t)\right]_0^{\frac{\pi}{2}},
\end{aligned}$$