CCP Maths 2 PSI 2000 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Gilles Radenne (ENS Ulm) ; il a été relu par Pascal Delanoe (Mines de Paris) et Cyril Niboyet (Mines de Paris).

L'épreuve se compose de cinq parties ; à chaque fois, un ou deux résultats seront utiles dans les parties suivantes.

– Le sujet porte sur les courbes de Bézier, que la première partie étudie dans des cas simples, avec deux ou trois points.
– On s'intéresse ensuite à la notion de convexité, qu'on utilise pour préciser l'étendue de ces courbes, et on regarde également l'effet d'une transformation affine sur ces courbes.
– La troisième partie est consacrée à l'étude du cas général avec n points par l'intermédiaire des coefficients barycentriques.
– La partie suivante définit les courbes de Bézier comme images de polynômes par une famille de morphismes, et on en déduit les dérivées successives de la trajectoire.
– Enfin la dernière partie s'intéresse à l'interpolation d'une famille de points par une courbe de Bézier l'approchant au mieux.

Cette épreuve est relativement longue, et très fortement calculatoire, mais ne requiert principalement que des connaissances en algèbre linéaire et en géométrie, avec cependant quelques dérivations partielles simples dans la dernière partie.

Indications

I.2.1 Exprimer Q_i en fonction des B_j.

II.1.1 Pour la réciproque, procéder par récurrence sur n.

II.1.3 Utiliser la question II.1.2 pour montrer que C(E) est le plus petit ensemble convexe contenant E.

II.1.5 Montrer que l'ensemble donné dans l'énoncé est le plus petit ensemble convexe contenant E.

II.1.6 Déterminer la relation existant entre l'enveloppe convexe de $\mathrm{A} \bigcup \mathrm{B}$ et celles de A et B.

II.2.2 Appliquer le résultat de la question II.2.1 à la question I.2.4 .

III.1.3 Penser à la formule du binôme de Newton, à ce que doit valoir la somme des $b_{n,k}$, et généraliser les expressions de $b_{3,k}$ obtenues à la question III.1.2 .

III.2.1 Comparer $b_{n,k}$ et $b_{n,n-k}$.

IV.1.1 Commencer par déterminer Z avec $i = 1$, puis démontrer le résultat par récurrence en utilisant la valeur de Z trouvée.

IV.1.4 Montrer d'abord l'égalité sur les monômes de W, puis utiliser la linéarité de Φ et des opérateurs dérivation.

IV.1.5 Exprimer $\mathrm{B}_{n,\mathrm{F}}$ comme un $\mathrm{C}_{i,j}$ puis appliquer les résultats des questions IV.1.1 et IV.1.4 .

IV.2 Utiliser aussi le résultat de la question III.2.1.

V.I Décomposer f en somme de carrés.

V.2 Exprimer explicitement f en fonction des variables (x_i et y_i) et des données du problème (M_k et t_k).

V.3 Construire les matrices A, U et V à l'aide des relations affines obtenues dans la question V.2.

Partie I

I.1.1 En appliquant la définition de B_F :

$$\boxed{B_F(t) = (1-t)B_0(P_0)(t) + tB_0(P_1)(t) = (1-t)P_0 + tP_1}$$

I.1.2 Ainsi, quand t parcourt $[\,0\,;1\,]$, $B_F(t)$ se déplace de P_0 à P_1, donc :

$$\boxed{\text{La trajectoire de l'arc paramétré } B_F \text{ est le segment } [P_0P_1].}$$

I.2.1
$$B_F\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}B_1(P_0,P_1)\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}B_1(P_1,P_2)\left(\frac{1}{2}\right)$$

D'après la question I.1.1, $B_1(M,N)\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{2}M + \dfrac{1}{2}N$, donc $B_1(M,N)$ est le milieu de $[MN]$; par suite $B_1(P_i,P_{i+1})\left(\dfrac{1}{2}\right) = Q_i$, ce qui entraîne :

$$\boxed{B_F\left(\frac{1}{2}\right) \text{ est le milieu du segment } [Q_0Q_1].}$$

I.2.2 On a :
$$\boxed{\begin{aligned} B_F(0) &= B_1(P_0,P_1)(0) = P_0 \\ B_F(1) &= B_1(P_1,P_2)(1) = P_2 \end{aligned}}$$

I.2.3
$$\begin{aligned}
B_F(t) &= (1-t)B_1(P_0,P_1)(t) + tB_1(P_1,P_2)(t) \\
&= (1-t)((1-t)P_0 + tP_1) + t((1-t)P_1 + tP_2) \\
B_F(t) &= (1-t)^2P_0 + 2t(1-t)P_1 + t^2P_2
\end{aligned}$$

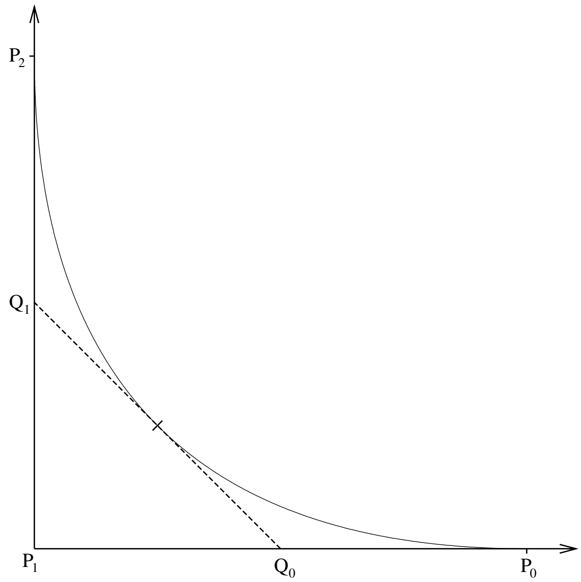
Et on a bien $\qquad (1-t)^2 + 2t(1-t) + t^2 = (1-t+t)^2 = 1$

Par conséquent, $B_F(t)$ est le barycentre des points (P_0,P_1,P_2) affectés des coefficients $((1-t)^2, 2t(1-t), t^2)$.

I.2.4.1
$$\begin{aligned}
B_F(t) &= \left((1-t)^2, t^2\right) \\
\frac{dB_F(t)}{dt} &= (2(t-1), 2t) \\
\frac{d^2B_F(t)}{dt^2} &= (2,2)
\end{aligned}$$

La trajectoire de l'arc paramétré B_F ayant une « accéleration constante », c'est un morceau de parabole d'extremités P_0 et P_2, et passant par $B_F\left(\dfrac{1}{2}\right) = \left(\dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{4}\right)$.

I.2.4.2 L'étude précédente permet de tracer le graphe suivant :



Graphe de B_F, pour $n = 2$.

Partie II

II.1.1 Pour un ensemble non vide K, on note $(*)$ la propriété définie dans l'énoncé. Montrons que cette propriété $(*)$ est équivalente à la propriété servant à définir la convexité.

Soit K une partie non vide du plan vérifiant $(*)$. Appliquons cette propriété pour $n = 2$:

$$\forall\,(M,N) \in K^2,\ \forall\,(\lambda_1,\lambda_2) \in (\mathbb{R}_+)^2 \qquad \lambda_1+\lambda_2 = 1 \Longrightarrow \lambda_1 M + \lambda_2 N \in K$$

ce qui revient strictement à la définition de la convexité.

Inversement, supposons que K est convexe, et montrons par récurrence que K vérifie $(*)$.

- Pour $n = 1$ la propriété est immédiate, et pour $n = 2$ on vient de démontrer que cela revenait à la définition de la convexité.
- Supposons $(*)$ vérifiée par K pour n fixé. Soient $(M_1,\ldots,M_{n+1}) \in K^{n+1}$ des points de K, $(\lambda_1,\ldots,\lambda_{n+1}) \in [\,0\,;1\,]$ des coefficients de somme égale à 1, et montrons que $\sum\limits_{k=1}^{n+1} \lambda_k M_k \in K$.

  On peut supposer $\sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k \neq 0$, sinon en utilisant le fait que les λ_i sont positifs, on a $\lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0$, ce qui entraîne $\sum\limits_{k=1}^{n+1} \lambda_k M_k = M_{n+1} \in K$ et la propriété est évidente.