CCP Maths 1 PSI 2000 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Pascal Delanoe (Mines de Paris), Éric Ricard (ENS Ulm) et Sébastien Desreux (ENS Ulm) ; il a été relu par David Guéron (Mines de Paris) et Gilles Radenne (ENS Ulm).

Cette épreuve, composée d'un seul problème divisé en trois parties relativement indépendantes, demande d'avoir de bonnes connaissances de base sur toutes les parties du programme d'analyse : équations différentielles, séries de fonctions, séries de Fourier, intégrales dépendant d'un paramètre, extrema d'une fonction de plusieurs variables.

- La première partie est consacrée à l'étude d'une équation différentielle avec conditions aux limites. Elle traite différents cas particuliers sans trop de difficultés. Ensuite une étude algébrique de cette équation est amorcée.
- La deuxième partie consiste principalement en l'étude d'une série de fonctions à deux variables.
- La troisième partie exploite les deux précédentes et permet de calculer la norme d'un opérateur relié à la fonction de la seconde partie ainsi qu'à l'opérateur différentiel de la première partie.

La longueur de cet enoncé est largement compensée par la difficulté plus que moyenne de la plupart des questions. Il s'agit principalement d'illustrer des concepts du cours sur quelques exemples. La partie I et les trois premières questions de la seconde partie sont largement abordables. La dernière partie, quant à elle, est un peu plus délicate (notamment les questions III.3 et III.7).

Indications

I.1.2.2 Distinguer le cas $\omega \in \mathbb{N}^*$.

I.2.2 Il faut résoudre l'équation différentielle sur deux intervalles avant de faire un raccord ou alors trouver une solution particulère en intégrant.

I.4 Utiliser l'unicité montrée à la question I.3 pour montrer la linéarité.

I.5. Pour la surjectivité, remarquer que l'image est contenue dans les fonctions de $\mathcal{C}^2$ nulle en 0 et π.

I.6. Interpréter les résultats de la question I.1.2.

I.7.3.1 Combiner les questions I.3 et I.7.2.

II.1.2 Montrer que la convergence de la série est normale.

II.3.2 Découper l'intégrale en deux parties.

II.4.1 Le carré C est la réunion de deux compacts sur lesquels K est continue.

II.4.2 Sur un ouvert, un extremum relatif d'une fonction dérivable est un point critique.

II.4.4 Remarquer que les valeurs décrites par K sur les deux triangles composant C sont les mêmes.

III.2 Utiliser les résultats des questions I.7.3.2 et II.3.3.

III.3 Montrer que h appartient à $\mathcal{C}^2([\,0\,;\pi\,]\,,\mathbb{R})$ et utiliser le théorème de prolongement des fonctions dérivables, ainsi que la périodicité et la parité de h.

III.5 Utiliser l'égalité de Parseval.

III.7.1 Penser au théorème de Fubini.

III.7.2 Intégrer $\mathrm{J}(f)$ par parties.

III.7.3 Penser à l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

III.7.4 Ramener le problème au cas d'égalité dans la relation démontrée à la question III.6.

Partie I

I.1.1 Lorsque $\alpha = 0$ et f est la fonction nulle, (E) se réécrit :

$$y'' = 0$$

donc, par double intégration, les solutions sont de la forme :

$$x \in [\,0\,;\pi\,] \longmapsto \mathrm{A}x + \mathrm{B}$$

avec A et B réels. Les conditions aux limites imposent par ailleurs :

$$\begin{cases} \mathrm{B} = 0 \\ \mathrm{A}\pi + \mathrm{B} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \mathrm{A} = 0 \\ \mathrm{B} = 0 \end{cases}$$

$\mathcal{S}^0(\mathrm{E})$ est donc réduit à la fonction nulle.

> On peut aussi remarquer que si la fonction polynomiale $\mathrm{A}x+\mathrm{B}$ a deux racines, c'est la fonction nulle.

I.1.2.1 Si $\alpha = \omega^2$, (E) se réécrit :

$$y'' - \omega^2 y = 0$$

Il s'agit d'une équation différentielle linéaire homogène du second ordre à coefficients constants. Les solutions sont de la forme

$$x \in [\,0\,;\pi\,] \longmapsto \mathrm{A}\,\mathrm{ch}\,(\omega x) + \mathrm{B}\,\mathrm{sh}\,(\omega x)$$

où A et B sont réels. D'autre part, les conditions aux limites imposent

$$\begin{cases} \mathrm{A} = 0 \\ \mathrm{A}\,\mathrm{ch}\,(\omega\pi) + \mathrm{B}\,\mathrm{sh}\,(\omega\pi) = 0 \end{cases}$$

Or $\mathrm{sh}\,(\omega\pi)$ n'est pas nul (car $\omega \neq 0$), donc $\mathcal{S}^0(\mathrm{E})$ est à nouveau réduit à la fonction nulle.

I.1.2.2 Si $\alpha = -\omega^2$, les solutions sont de la forme

$$x \in [\,0\,;\pi\,] \longmapsto \mathrm{A}\cos(\omega x) + \mathrm{B}\sin(\omega x)\,, \quad (\mathrm{A}, \mathrm{B}) \in \mathbb{R}^2$$

et par ailleurs :
$$\begin{cases} \mathrm{A} = 0 \\ \mathrm{A}\cos(\omega\pi) + \mathrm{B}\sin(\omega\pi) = 0 \end{cases}$$

Deux cas se présentent alors :
- si $\omega \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{S}^0(\mathrm{E}) = \{x \in [\,0\,;\pi\,] \longmapsto \lambda \sin(\omega x) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$;
- sinon, $\mathcal{S}^0(\mathrm{E})$ est réduit à la fonction nulle.

I.2.1.1 Lorsque $\alpha = 0$ et $f(x) = \cos(x)$, l'équation (E) se réécrit :

$$y''(x) = \cos(x)$$

Par exemple, en intégrant deux fois, on trouve pour solutions

$$x \in [\,0\,;\pi\,] \longmapsto -\cos(x) + \mathrm{A}x + \mathrm{B}$$

où A et B sont réels.

> La solution générale de l'équation avec second membre est la somme de la solution générale de l'équation homogène associée $y'' = 0$, soit $y(x) = \mathrm{A}x+\mathrm{B}$, et d'une solution particulière de l'équation avec second membre, par exemple $y(x) = -\cos x$.

Les conditions aux limites imposent de plus :

$$\begin{cases} y(0) = 0 = \mathrm{B} - 1 \\ y(\pi) = 0 = \mathrm{A}\pi + \mathrm{B} + 1 \end{cases} \iff \begin{cases} \mathrm{B} = 1 \\ \mathrm{A} = -2/\pi \end{cases}$$

d'où $$\boxed{\mathcal{S}^0(\mathrm{E}) = \left\{ x \in [\,0\,;\pi\,] \longmapsto -\cos(x) - \frac{2}{\pi}x + 1 \right\}}$$

I.2.1.2 Lorsque $\alpha = 0$ et $f(x) = \sin(nx)$ avec $n \neq 0$, (E) se réécrit :

$$y''(x) = \sin(nx)$$

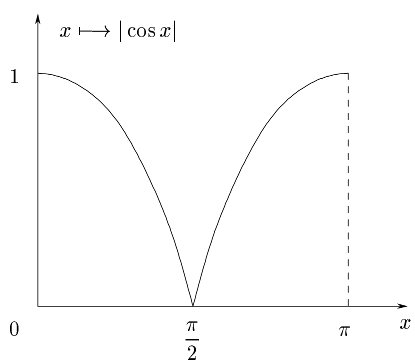
Les solutions de cette équation sont de la forme

$$x \in [\,0\,;\pi\,] \longmapsto -\frac{\sin(nx)}{n^2} + \mathrm{A}x + \mathrm{B}\,, \quad (\mathrm{A}, \mathrm{B}) \in \mathbb{R}^2$$

La condition $y(0) = y(\pi) = 0$, impose alors $\mathrm{A} = \mathrm{B} = 0$, d'où

$$\boxed{\mathcal{S}^0(\mathrm{E}) = \left\{ x \in [\,0\,;\pi\,] \longmapsto -\frac{1}{n^2}\sin nx \right\}}$$

I.2.2.1 L'équation à résoudre est maintenant $y''(x) = |\cos(x)|$.



> Le dessin de la fonction suggère de découper l'intervalle au point $\pi/2$; il suffira de procéder ensuite à un recollement.

Résolvons l'équation (E) sur les segments $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$ et $\left[\frac{\pi}{2}\,;\pi\right]$:

– sur $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$, (E) devient $y''(x) = \cos(x)$, d'où

$$y(x) = -\cos(x) + \mathrm{A}x + \mathrm{B} \tag{1}$$

– sur $\left[\frac{\pi}{2}\,;\pi\right]$, (E) devient $y''(x) = -\cos(x)$, d'où

$$y(x) = \cos(x) + \mathrm{C}x + \mathrm{D} \tag{2}$$