

## Mines Physique 1 PC 2000 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Nathanaël Schaeffer (ENS Lyon); il a été relu par Patrick Charmont (ENS Lyon) et Fabien Guérin (École polytechnique).

---

Cette épreuve, qui comporte quelques difficultés, est entièrement consacrée à l'étude (quelque peu répétitive) de transformations irréversibles en thermodynamique.

Les deux parties, bien qu'indépendantes se recoupent.

Dans le premier problème, on introduit la fonction  $G^*$ , pour étudier l'irréversibilité de différentes transformations. On s'intéresse d'abord à un fluide parfait, puis à un système diphasé, et enfin à une particule matérielle.

Dans le second problème, on essaie de voir dans quelle mesure on peut réduire l'irréversibilité de certaines transformations sur des systèmes aussi divers qu'un gaz parfait, un ressort et un condensateur.

**Indications****Premier problème**

- 0 Utiliser l'enthalpie H.
- 1 L'entropie étant une fonction d'état, on peut appliquer le résultat de la question 0.
- 5 Il peut être intéressant de noter que  $\Delta U = C_v \Delta T$  et que  $C_v = C_p - R$ .
- 6 Intégrer l'inégalité thermodynamique.
- 9 La transformation est isotherme.
- 12 La puissance d'une force est  $\mathcal{P} = \vec{F} \cdot \vec{v}$ , avec  $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$ .
- 15 Développer  $G^*$  autour de l'équilibre d'une part, et différencier  $G^*$  deux fois d'autre part. Identifier.
- 16 Examiner la stabilité de l'équilibre.

**Deuxième problème**

- 18 Il peut être intéressant d'établir la relation  $\Delta S = C_v \ln \frac{T_f}{T_0} + R \ln \frac{V_f}{V_0}$ . Elle servira dans toute la suite.
- 20 On peut chercher un équivalent de  $\Delta S_U$  lorsque N devient très grand, en effectuant un développement limité de  $(\Delta S_U)_k$ , puis en sommant.
- 23 Inutile de refaire les calculs, c'est la même chose qu'à la question 20...
- 24 Effectuer les bilans sur les sous-systèmes, et sommer.
- 27 Établir tout d'abord l'expression de la variation d'énergie potentielle pour une étape.
- 28 On suppose que l'entropie du ressort ne dépend pas de l'allongement.
- 29 La puissance fournie par un generateur est UI, et  $I = \frac{dq}{dt}$ . En déduire l'énergie fournie.
- 32 Même calcul qu'à la question 23. Attention au nombre d'étapes.

## Premier problème : Irréversibilité et fonction G\*

**1. Cas du fluide parfait**

**0** L'expression qu'on veut établir fait intervenir P et T. On utilise donc l'enthalpie H qui est reliée à S par l'identité thermodynamique :

$$dS = \frac{dH}{T} - \frac{V}{T}dP$$

L'équation des gaz parfaits  $PV = RT$ , ainsi que la relation  $dH = C_p dT$  nous permettent d'écrire

$$dS = C_p \frac{dT}{T} - R \frac{dP}{P}$$

Cette dernière équation différentielle, à variables séparées, ne fait intervenir que deux variables, P et T, qui sont donc indépendantes. On peut donc intégrer indépendamment par rapport à T et P.

$$\int_1^2 dS = C_p \int_1^2 \frac{dT}{T} - R \int_1^2 \frac{dP}{P}$$

Les valeurs de P et T finales et initiales étant connues, on obtient finalement l'expression recherchée :

$$S_2 - S_1 = C_p \ln \frac{T_2}{T_1} - R \ln \frac{P_2}{P_1}$$

Une équation différentielle à variables séparées, contenant P, T, et V, ne peut pas être résolue en intégrant indépendamment sur ces trois variables. En effet, elles sont liées par l'équation d'état  $PV = RT$ , et ne peuvent donc pas varier indépendamment.

**1** Le piston est libre, et la paroi diatherme. À l'équilibre on a donc égalité des températures et des pressions à l'intérieur et à l'extérieur du piston.

Comme l'entropie est une fonction d'état, l'expression établie à la question 0 est valable pour une transformation quelconque d'un gaz parfait. On applique donc cette relation à la transformation proposée, sachant que l'état d'équilibre est  $(P_0, T_0)$ .

$$\Delta S_1 = -R \ln \frac{P_0}{P}$$

- Si  $P > P_0$ , on a  $\Delta S_1 > 0$ ;
- si  $P < P_0$ , on a  $\Delta S_1 < 0$ .

L'évolution du gaz est irréversible dans les deux cas, bien que le signe de  $\Delta S_1$  ne soit pas le même. En effet, le gaz dans le piston n'est pas un système isolé, puisqu'il peut échanger chaleur et travail avec l'extérieur. Comme le second principe  $\Delta S > 0$  ne s'applique qu'à des systèmes isolés, le signe de la variation d'entropie du gaz ne donne pas d'information particulière sur l'éventuelle irréversibilité de la transformation.

**2** L'entropie est additive. On connaît déjà la variation d'entropie du gaz, il reste donc à calculer la variation d'entropie du thermostat, qui est toujours

$$\Delta S_{\text{thermostat}} = \frac{Q_{\text{thermostat}}}{T_{\text{thermostat}}}$$

Il nous faut donc trouver la quantité de chaleur que le thermostat a échangé avec la source. Pour cela, on se rappelle que l'énergie interne d'un gaz parfait ne dépend que de sa température. Comme elle est la même pour les états initial et final, on a :

$$\Delta U = 0 = W + Q$$

Or  $W = -P_{\text{ext}}\Delta V$ , donc  $Q = P_0\Delta V$ . En utilisant l'équation des gaz parfaits, on peut calculer  $\Delta V = RT_0 \left( \frac{1}{P_0} - \frac{1}{P} \right)$ . Comme  $Q_{\text{gaz}} = -Q_{\text{thermostat}}$ , on a finalement :

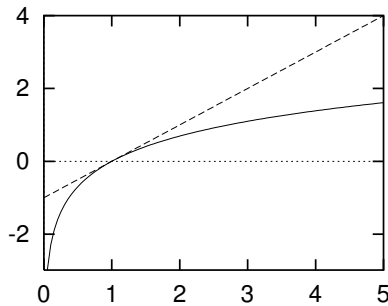
$$\Delta S_{\text{thermostat}} = -RP_0 \left( \frac{1}{P_0} - \frac{1}{P} \right)$$

D'où :

$$(\Delta S_1)_U = R \left( \frac{P_0}{P} - 1 - \ln \frac{P_0}{P} \right)$$

Ce qu'on peut écrire en fonction de  $x = \frac{P_0}{P}$ , avec  $s(x) = (x - 1) - \ln x$  :

$$\boxed{(\Delta S_1)_U = R(x - 1 - \ln x) = Rs(x)}$$



On voit que la courbe d'équation  $y = x - 1$  est toujours au-dessus de la courbe  $y = \ln x$ . Donc  $(\Delta S_1)_U \geq 0$ .

| Le second principe est bien vérifié.

**3** Comme pour la question 1, on applique la formule obtenue à la question 0. L'état final, à l'issue de cette transformation isobare, est  $(P_0, T_0)$  :

$$\boxed{\Delta S_2 = C_p \ln \frac{T_0}{T}}$$

**4** On procède exactement comme à la question 2 : on cherche à exprimer le transfert thermique reçu par le thermostat. Ici, on a affaire à une transformation à pression constante. Le transfert thermique reçu par le gaz est donc  $Q_{\text{gaz}} = -Q_{\text{th}} = C_p\Delta T$ .

D'où

$$(\Delta S_2)_{\text{th}} = -\frac{C_p\Delta T}{T_0}$$