Centrale Physique 2 PC 2000 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Jean-Yves Tinevez (ENS Lyon) ; il a été relu par Franck Stauffer (ENS Lyon) et Patrick Charmont (ENS Lyon).

Ce sujet aborde de manière théorique et expérimentale le problème des ondes de surface d'un liquide. Il se décompose en trois parties qui développent à chaque fois un des aspects d'une étude générale. Sauf dans les dernières questions, il est très peu calculatoire, et ne nécessite pas de connaissance importante en mécanique des fluides. Il demande plutôt de la part du candidat une certaine aptitude à raisonner avec des ordres de grandeur et la capacité de les déduire à partir de données générales. Il faut également maîtriser les bases de l'optique ondulatoire et de l'hydrodynamique.

La première partie permet de se familiariser avec le problème. Au cours de calculs relativement simples, on obtient des valeurs numériques et des ordres de grandeurs qui fixeront les limites du modèle.

La seconde partie est la plus longue. On y décrit un processus expérimental permettant de valider la relation de dispersion obtenue par une analyse dimensionelle dans la partie précédente. Elle fait intervenir principalement des outils d'optique.

La troisième partie est consacrée à l'étude théorique de ces ondes. Elle est relativement courte, mais chaque question impose de bien réfléchir aux données du problème avant de se lancer dans les calculs.

Indications

I.B Considérer la seule masse de fluide à être affectée par le mouvement et évaluer son énergie potentielle de pesanteur.

I.C Il faudra exprimer la dimension de l'énergie en fonction de celle des autres unités. On pourra, si l'on ne s'en souvient pas, utiliser une expression de l'énergie potentielle de pesanteur.

I.D.1 Les parois sont impérméables, ce qui impose une condition sur la vitesse du fluide aux parois.

I.D.3 Procéder comme à la question I.B.

I.D.4 Pour obtenir une idée du libre parcours moyen dans un liquide, considérer qu'une telle phase est *dense*.

II.B.3 Faire un développement limité de la relation donnée à la question II.B.2.

II.C.1 Pour obtenir l'expression en $\overrightarrow{k} - \overrightarrow{k_0}$, raisonner en terme de projection. Par la suite, il sera judicieux d'utiliser les coordonnées cartésiennes pour expliciter l'expression de la différence de marche.

II.C.4 Développer la fonction sinus en exponentielles pour obtenir une somme de deux ondes. Exprimer k en fonction de ω_0 et Ω dans l'un des deux cas pour obtenir l'erreur relative.

II.D.1 Considérer que l'on développe le carré d'une somme de deux termes, l'un d'ordre 0 et l'autre d'ordre 1.

II.D.3 Quel aurait-été l'ordre en h_M/λ_0 si l'on avait omis l'onde de référence ?

II.D.4 Raisonner sur le contraste.

II.E.2 Une condition pour détecter le signal est que l'onde de référence soit présente dans la direction d'observation.

II.F La plupart des mouvements amortis sont en $e^{-t/\tau}$ où τ est un temps caractéristique de l'amortissement.

III.A.1 Utiliser la propriété d'incompressibilité du fluide.

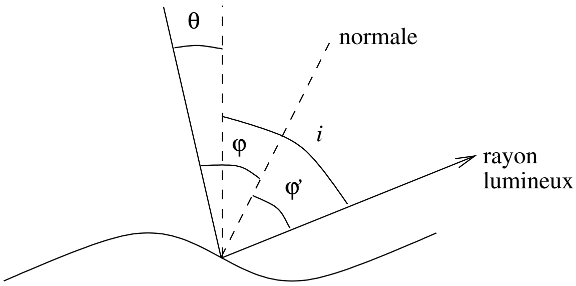
III.A.3 Utiliser la forme de $f(z)$.

III.C Essayer de faire apparaître une relation du type $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\ \mathrm{C} = 0$.

III.D.1 Commencer par calculer l'expression de la normale et de la tangente à la surface en fonction de $h(x,t)$, puis écrire la relation fondamentale de la dynamique projetée sur Oz.

Partie I Préliminaires : quelques ordres de grandeurs

I.A Si l'on considère l'eau comme totalement réfléchissante et au repos, sa surface agit comme un miroir et l'on récupère de la lumière dans la direction $i = -\theta$. Ceci n'est plus vrai dans notre cas, car la surface n'est pas plane ; on a toujours dans le plan d'incidence l'égalité des angles pour les rayons incident et réfléchi, mais comptés à partir de la normale et ici, la normale à la surface n'est plus verticale :



On a bien $\varphi = \varphi'$ si l'on compte les angles à partir de la normale.

I.B Pour l'interface, le fluide en mouvement est contenu dans un volume de l'ordre de ΛS, et se déplace sur une distance de l'ordre de Λ. L'énergie potentielle de pesanteur du fluide s'écrit donc

$$\mathrm{E}_z = \mu\,\mathrm{S}\,\Lambda^2\,g$$

On peut évaluer l'importance relative des forces de pesanteur en comparant cette énergie avec celle des forces de tension superficielle :

$$\frac{\mathrm{E}_z}{\mathrm{E}_p} = \frac{\mu\,\mathrm{S}\,\Lambda^2\,g}{\mathrm{A}\,\mathrm{S}} \simeq 10^{-4}$$

Au vu de la petitesse du rapport, on estime que la forme et le mouvement de l'interface sont gouvernés par la tension de surface, et l'on pourra négliger les forces de pesanteur.

I.C Dans cette analyse dimensionnelle, on note respectivement T, M, L, J les dimensions d'un temps, d'une masse, d'une longueur et d'une énergie.

$$[\Omega]^2 = [\mathrm{A}]^\alpha\,[\mu]^\beta\,[\mathrm{K}]^\gamma$$
$$\mathrm{T}^{-2} = (\mathrm{J}\,\mathrm{L}^{-2})^\alpha\,(\mathrm{M}\,\mathrm{L}^{-3})^\beta\,\mathrm{L}^{-\gamma}$$
$$\mathrm{T}^{-2} = \mathrm{J}^\alpha\,\mathrm{L}^{(-2\alpha-3\beta-\gamma)}\,\mathrm{M}^\beta$$

Mais comme on peut le déduire de l'équation vue plus haut $\mathrm{E}_z = mgz$: $\mathrm{J} = \mathrm{M}\mathrm{L}^2\mathrm{T}^{-2}$, d'où

$$\mathrm{T}^{-2} = \mathrm{T}^{-2\alpha}\,\mathrm{L}^{-3\beta-\gamma}\,\mathrm{M}^{\alpha+\beta}$$

On déduit alors facilement $\alpha = 1$, $\beta = -1$, $\gamma = 3$, soit

$$\Omega = \sqrt{\frac{\mathrm{A}\,\mathrm{K}^3}{\mu}}$$
$$\Omega \simeq 521\,000\ \mathrm{rad.s^{-1}}$$

ce qui donne une période de

$$\boxed{\mathrm{T} = \frac{2\,\pi}{\Omega} \simeq 1,21\,.10^{-5}\ \mathrm{s}}$$

I.D.1 Il n'y a pas de flux à travers les bords du récipient (paroi imperméable), donc la composante orthogonale de la vitesse aux bords est nulle.

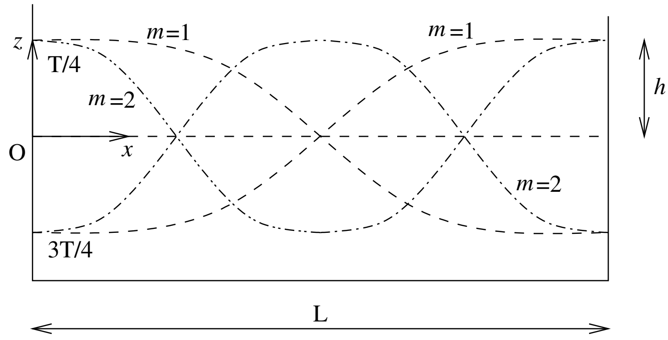
- Pour $y \in \{0, \mathrm{L}\}$, $v_y = \dfrac{\partial \phi}{\partial y} = 0$ conduit à $0 = 0$ (c'est une conséquence de l'invariance selon y).
- Pour $x \in \{0, \mathrm{L}\}$, il vient

  $$v_x = \frac{\partial \phi}{\partial x} = 0 = -h_m\,\Omega\,f(z)\,\cos(\Omega t)\,\sin(\mathrm{K}x)$$

  quel que soit t. Ce qui conduit à $\sin(\mathrm{KL}) = 0$ et

  $$\boxed{\mathrm{L} = \frac{m\,\pi}{\mathrm{K}} \qquad \text{avec} \qquad m \in \mathbb{N}}$$

I.D.2 L'équation de la surface libre s'écrit $h(x,t) = h_\mathrm{M} \sin(2\pi t/\mathrm{T}) \cos(\pi x/\mathrm{L})$ pour $m = 1$ et $h(x,t) = h_\mathrm{M} \sin(2\pi t/\mathrm{T}) \cos(2\pi x/\mathrm{L})$ pour $m = 2$.



Ces ondes sont stationnaires, alors que celles de la question I.C étaient progressives (c'est-à-dire de la forme $f(x - ct) + g(x + ct)$).

> On peut toujours exprimer les ondes stationnaires comme une combinaison linéaire d'ondes propagatives. Sur notre exemple, en utilisant les formules de trigonométrie élémentaire, on a :
>
> $$h(x,t) = h_\mathrm{M}/2\,(\sin(\Omega t + \mathrm{K}x) + \sin(\Omega t - \mathrm{K}x))$$
>
> On convient d'appeler stationnaires les solutions de la forme $f(x)g(t)$.

I.D.3 Le volume de liquide en mouvement est de l'ordre de $\mathrm{L}^2\,\Lambda$ (il est dit que l'essentiel du mouvement du liquide est localisé sur une épaisseur Λ ; les autres parties du fluide auront une vitesse nulle et une énergie cinétique nulle également). On devra donc considérer la masse $\mu\,\mathrm{L}^2\,\Lambda$ de liquide. La vitesse d'une particule de fluide est, selon la forme du gradient des vitesses donné, de l'ordre de $h_\mathrm{M}\,\Omega$.

On a alors (à un préfacteur numérique près, sans intérêt pour les ordres de grandeurs)

$$\mathrm{E}_c \sim \mu\,\mathrm{L}^2\,\Lambda\,h_\mathrm{M}^2\,\Omega^2$$