X Maths 1 PC 2000 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Mathieu Dutour (ENS Ulm) ; il a été relu par Brice Goglin (ENS Ulm) et David Hernandez (ENS Ulm).

Une fois de plus, l'X montre la voie : un problème original qui porte sur l'utilisation de l'algèbre en informatique. Significativement, on abandonne la notation C_n^k, qui est franco-francaise, pour la notation internationale $\displaystyle\binom{n}{k}$. Le problème n'est pas classique dans l'ensemble, mais on peut se rattraper à différentes questions faciles, dispersées un peu partout.

La première partie, classique, concerne un ensemble de polynômes orthogonaux P_n. La seconde partie, très courte, porte sur des dénombrements. La troisième est consacrée aux matrices d'adjacences et à leurs valeurs propres.

Indications

I.2.a C'est une question classique, où il faut montrer que deg $\mathrm{P}_n = n$ et déterminer le coefficient dominant. On montre d'abord que deg $\mathrm{P}_n \leqslant n$. Ensuite on détermine le coefficient de X^n et s'il est non nul cela veut dire que P_n est de degré n.

I.4.a Le binôme de Newton est évidemment très utile dans toute question où il y a des $\dbinom{n}{k} = \mathrm{C}_n^k$.

I.4.b Ce genre de résultat peut être délicat à démontrer, même s'il semble relativement clair. Dans ce cas particulier, il faut montrer le résultat pour les fonctions $(uv)^j$.

II Pour ces questions d'ensemble, il peut être utile de faire des dessins.

II.8 Utiliser le fait que A diffère de I par l'ajout ou le retrait d'un seul élément.

III.9.b Ce genre de relation matricielle A = B, qui sort d'un contexte où elles n'existent pas a priori, doit se montrer comme suit : déterminer l'expression de chacun des termes A_{pq} et B_{pq}, puis constater l'égalité.

III.10 C'est une récurrence entre les termes $m-1$, m et $m+1$ qui est utilisée ; il faut donc montrer HR_0 et HR_1 avant d'envisager de montrer HR_{m+1}.

III.11 Utiliser la question I.2.c.

III.13.a C'est sans conteste la question la plus difficile du problème. Il faut montrer que

$$(\mathrm{B}_k\mathrm{B}_l)_{pq} = \frac{1}{2^{\mathrm{N}}}\mathrm{P}_k(\mathrm{d}(\mathrm{I}_p,\mathrm{I}_q))$$

puis $$\mathrm{P}_k(\mathrm{d}(\mathrm{I}_p,\mathrm{I}_q)) = \sum_{\substack{\mathrm{J}\in\mathcal{P}(\mathrm{E})\\ \mathrm{Card}\ \mathrm{J}=k}} (-1)^{\mathrm{Card}\ (\mathrm{I}_p\Delta\mathrm{I}_q)\cap\mathrm{J}}$$

Il faut intervertir les trois sommes qui apparaissent dans le produit $(\mathrm{B}_k\mathrm{B}_l)_{pq}$. Enfin, on peut utiliser la question III.12.b .

III.13.b Question classique qui utilise le fait que si p est un projecteur, alors $\mathrm{Tr}\ p = \mathrm{rg}\ p$.

III.14.a Il s'agit à nouveau d'une question extrêmement délicate. La famille $(\mathrm{B}_k)_{0\leqslant k\leqslant \mathrm{N}}$ s'exprime en fonction de la famille $(\mathrm{A}_n)_{0\leqslant n\leqslant \mathrm{N}}$. Il faut donc inverser le système linéaire pour obtenir les A_n en fonction des B_k. Utiliser ensuite la première partie où l'on montre que les P_k forment une famille orthonormée. Calculer la norme $\langle \mathrm{P}_k | \mathrm{P}_k\rangle$.

I Les polynômes P_n

I.1 Si $j \geqslant k$, alors

$$\phi_k(j) = \frac{j(j-1)\ldots(j-(k-1))}{k!} = \frac{j!}{k!(j-k)!} = \binom{j}{k}$$

et si $0 \leqslant j < k$, alors $\phi_k(j) = 0$. On a donc dans tous les cas la relation

$$\boxed{\forall\, j \in \mathbb{N}, \qquad \phi_k(j) = \binom{j}{k}}$$

I.2.a On a $\phi_0(X) = 1$, $\phi_1(X) = X$ et $\phi_2(X) = \dfrac{X(X-1)}{2}$ d'où l'on tire

$$\begin{aligned} P_0(X) &= \phi_0(X)\phi_0(N-X) = 1 \\ P_1(X) &= \phi_0(X)\phi_1(N-X) - \phi_1(X)\phi_0(N-X) = N - 2X \end{aligned}$$

ce qui donne $\boxed{P_0(X) = 1 \qquad \text{et} \qquad P_1(X) = N - 2X}$

$$\begin{aligned} P_2(X) &= \phi_0(X)\phi_2(N-X) - \phi_1(X)\phi_1(N-X) + \phi_2(X)\phi_0((N-X) \\ &= \frac{(N-X)(N-X-1)}{2} - X(N-X) + \frac{X(X-1)}{2} \\ &= \frac{X^2 - X(2N-1) + N(N-1) - 2XN + 2X^2 + X^2 - X}{2} \end{aligned}$$

$$\boxed{P_2(X) = \frac{4X^2 - X(4N) + N(N-1)}{2}}$$

I.2.b Le degré de ϕ_k est k, le degré de ϕ_{n-k} est $n-k$, donc le degré de $\phi_k(X)\phi_{n-k}(N-X)$ est n. Le degré d'une somme étant inférieur au maximum des degrés, deg $P_n \leqslant n$.

Calculons le coefficient du terme de degré n. S'il n'est pas nul, alors le degré est égal à n. Le coefficient de X^k dans ϕ_k est $\dfrac{1}{k!}$; le coefficient de X^{n-k} dans $\phi_{n-k}(N-X)$ est $\dfrac{(-1)^{n-k}}{(n-k)!}$; par suite, le coefficient de X^n dans P_n est :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{k=N} (-1)^k \frac{1}{k!}\frac{(-1)^{n-k}}{(n-k)!} &= (-1)^n \sum_{k=0}^{k=N} \frac{1}{k!}\frac{1}{(n-k)!} \\ &= \frac{(-1)^n}{n!} \sum_{k=0}^{k=N} \binom{n}{k} \\ \sum_{k=0}^{k=N} (-1)^k \frac{1}{k!}\frac{(-1)^{n-k}}{(n-k)!} &= \frac{(-1)^n}{n!} 2^n \end{aligned}$$

Ce qui donne $\boxed{\dfrac{(-1)^n 2^n}{n!}}$

I.2.c On utilise la question I.1 et on obtient

$$\boxed{\mathrm{P}_n(j) = \sum_{k=0}^{k=\mathrm{N}} (-1)^k \phi_k(j)\phi_{n-k}(\mathrm{N}-j) = \sum_{k=0}^{k=\mathrm{N}} (-1)^k \binom{j}{k}\binom{\mathrm{N}-j}{n-k}}$$

I.3 On utilise la formule du binôme de Newton sur la fonction

$$f_j : \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ u \longmapsto (1-u)^j(1+u)^{\mathrm{N}-j} \end{cases}$$

Le coefficient de u^k dans $(1-u)^j$ est $(-1)^k\dbinom{j}{k}$. Le coefficient de u^{n-k} dans $(1+u)^{\mathrm{N}-j}$ est $\dbinom{\mathrm{N}-j}{n-k}$, donc le coefficient de u^n dans $(1-u)^j(1+u)^{\mathrm{N}-j}$ est la somme sur tous les k possibles.

Ainsi, $$\boxed{\sum_{k=0}^{k=\mathrm{N}} (-1)^k \binom{j}{k}\binom{\mathrm{N}-j}{n-k} = \mathrm{P}_n(j)}$$

> Pour l'origine des polynômes de Krawtchouk et des analogues, on peut se référer à l'ouvrage *Sphere Packings, lattices and Groups* de J.H. Conway et N.J.A. Sloane, Édition Springer (p. 255), qui aborde également les questions de codes.

I.4.a On utilise le résultat précédent :

$$\begin{aligned}
\mathrm{F}(u,v) &= \sum_{j=0}^{\mathrm{N}} \binom{\mathrm{N}}{j} f_j(u) f_j(v) \\
&= \sum_{j=0}^{\mathrm{N}} \binom{\mathrm{N}}{j} (1-u)^j(1+u)^{\mathrm{N}-j}(1-v)^j(1+v)^{\mathrm{N}-j} \\
&= \sum_{j=0}^{\mathrm{N}} \binom{\mathrm{N}}{j} [(1-u)(1-v)]^j[(1+u)(1+v)]^{\mathrm{N}-j} \\
&= [(1-u)(1-v)+(1+u)(1+v)]^{\mathrm{N}} \\
&= (2+2uv)^{\mathrm{N}} \\
\mathrm{F}(u,v) &= 2^{\mathrm{N}}(1+uv)^{\mathrm{N}}
\end{aligned}$$

ce qui donne la formule attendue, avec

$$\boxed{\alpha = 2^{\mathrm{N}} \qquad \text{et} \qquad \beta = \mathrm{N}}$$

I.4.b Si on prend un terme $\mathrm{Q}_j = (uv)^j$ alors, en différentiant :

$$\frac{\partial^{a+b}\mathrm{Q}_j}{\partial u^a \partial v^b} = \frac{\partial^a u^j}{\partial u^a}\frac{\partial^b v^j}{\partial v^b} = \frac{j!}{(j-a)!}u^{j-a}\frac{j!}{(j-b)!}v^{j-b}$$

Cette quantité ne peut être non nulle en 0 que si $j-a=0$ et $j-b=0$, auquel cas elle vaut $(a!)^2$. La fonction F s'exprime comme un polynôme en uv :

$$\mathrm{F}(u,v) = 2^{\mathrm{N}} \sum_{j=0}^{j=\mathrm{N}} \binom{\mathrm{N}}{j} (uv)^j$$