CCP Maths 1 PC 2000 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Bruno Reyssat (ENS Lyon) ; il a été relu par Théo Seffusatti (Mines Paris) et Mathieu Dutour (ENS Ulm).

L'épreuve se compose de trois parties ; les deux premières sont indépendantes entre elles.

Dans la première partie, on établit quelques propriétés élémentaires des matrices carrées à coefficients réels, pour aboutir à une preuve du théorème de Cayley-Hamilton.

Dans la seconde partie, on s'intéresse en particulier au rang des matrices, aux liens entre bases de $\mathbb{R}^n$ et bases de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, et on démontre quelques propriétés particulières aux matrices de rang 1.

Dans la troisième partie, on étudie les endomorphismes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de type

$$h_{\mathrm{A,B}} : \mathrm{M} \longmapsto \mathrm{AM} - \mathrm{MB}$$

où A et B sont des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. En particulier, on cherche des liens entre la diagonalisabilité de A, B et celle de $h_{\mathrm{A,B}}$. Le problème se termine par l'étude du cas où $\mathrm{A} = \mathrm{B}$.

Indications

I.1.a Utiliser le rang de A.

I.1.b Écrire la matrice inconnue X par blocs.

I.1.c Développer les déterminants de X et de P.

I.2 Utiliser la question I.1.c.

I.4.b Utiliser la définition de q.

I.4.c Écrire le déterminant, le développer par rapport à la dernière colonne, et utiliser la question I.2.

II.1.c Remarquer qu'un réel commute avec toute matrice.

II.3.b Utiliser le fait que toute matrice de rang r est équivalente à celle calculée à la question précédente.

II.3.c Utiliser la question II.3.b.

II.4.a Montrer que la famille obtenue est libre.

II.4.b Utiliser la question II.4.a.

II.4.c Montrer que le rang de cette famille est exactement rs en utilisant la question II.4.a.

II.5 Montrer par un contre-exemple que la réciproque est fausse.

II.6.a Utiliser la question II.3.c.

II.6.b Utiliser la question II.1.b, et la caractérisation par les polynômes annulateurs des matrices diagonalisables.

II.7 Construire explicitement toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ comme combinaison linéaire de matrices diagonalisables de rang 1. Utiliser la question II.6.b pour montrer que les matrices utilisées sont diagonalisables.

III.1.c Utiliser la caractérisation des matrices diagonalisables par les polynômes annulateurs.

III.3 Utiliser les questions II.4.b et III.2.

III.5.b Utiliser les questions I.4.c et III.5.a.

III.5.c Calculer le spectre complexe de $\mathrm{B} + \lambda\,\mathrm{Id}_n$, puis utiliser la question III.2.

III.6 Utiliser la question III.5.c.

III.7.a Montrer que la famille $(\mathrm{M}_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant n}}$ est libre.

III.7.b Utiliser le fait que si $j \neq k$, alors $\delta_{jk} = 0$.

III.7.c Utiliser les questions III.3 et III.7.b.

III.7.e Montrer d'abord que le polynôme caractéristique de A est aussi son polynôme minimal, puis utiliser la question III.7.d.

III.8 Pour déduire que A est diagonalisable, montrer que A admet effectivement une valeur propre réelle en utilisant la question III.5.c.

Partie I

I.1.a Si A n'est pas inversible, alors son rang est strictement inférieur à n. Mais on a les inégalités

$$\text{rg M} \leqslant \text{rg A} + \text{rg}\begin{pmatrix}\text{B}\\ \text{C}\end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \text{rg}\begin{pmatrix}\text{B}\\ \text{C}\end{pmatrix} \leqslant p$$

d'où on déduit qu'alors, rg M $< n+p$, c'est-à-dire que :

$$\boxed{\text{M n'est pas inversible.}}$$

> Il est important de se souvenir que pour toute matrice N, rg N $=$ rg $({}^t\text{N})$, donc en particulier pour $\text{N} \in \mathcal{M}_{n,k}(\mathbb{R})$,
>
> $$\text{rg N} \leqslant \min(n,k)$$
>
> On pouvait aussi écrire qu'il existe un vecteur non nul de $\mathbb{R}^n$ annulé par A, et montrer qu'en le complétant par des zéros en un vecteur de $\mathbb{R}^{n+p}$, on obtient un vecteur non nul annulé par M.

I.1.b Pour résoudre l'équation XP $=$ M, écrivons X selon la même décomposition en blocs que M,

$$\text{X} = \begin{pmatrix}\text{Q} & \text{R}\\ \text{S} & \text{T}\end{pmatrix}$$

Cette équation équivaut alors aux quatre équations obtenues en effectuant le produit par blocs :

$$\left\{\begin{aligned}\text{QA} &= \text{A}\\ \text{SA} &= 0\\ \text{R} &= \text{B}\\ \text{T} &= \text{C}\end{aligned}\right.$$

Puisque A est inversible, QA $=$ A équivaut à $\text{Q} = \text{Id}_n$, et $\text{SA} = 0_{p,n}$ équivaut à $\text{S} = 0_{p,n}$, d'où l'unique solution :

$$\boxed{\text{X} = \begin{pmatrix}\text{Id}_n & \text{B}\\ 0_{p,n} & \text{C}\end{pmatrix}}$$

I.1.c Si A n'est pas inversible, le résultat est trivial, puisque la question I.1.a nous assure que les deux termes sont nuls. Sinon, développons le déterminant de X par rapport à la première colonne : un seul terme est non nul, celui correspondant au mineur obtenu en supprimant la première ligne et la première colonne. Notons B_i la matrice B privée de ses i premières lignes. En répétant n fois ce procédé, on obtient

$$\det \text{X} = \begin{vmatrix}\text{Id}_{n-1} & \text{B}_1\\ 0_{p,n-1} & \text{C}\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}\text{Id}_{n-2} & \text{B}_2\\ 0_{p,n-2} & \text{C}\end{vmatrix} = \cdots = \begin{vmatrix}1 & \text{B}_{n-1}\\ 0_{p,1} & \text{C}\end{vmatrix} = \det \text{C}$$

De la même manière, en développant p fois le déterminant de P par rapport à sa dernière colonne, on obtient $\det \text{P} = \det \text{A}$.

Mais alors, puisque XP $=$ M, on a $\det \text{M} = \det \text{X} \times \det \text{P}$, d'où

$$\boxed{\det \text{M} = \det \text{A} \times \det \text{C}}$$

I.2 Soient $(e_1, \dots e_p)$ une base de F et M_v la matrice de v dans cette base. Le théorème de la base incomplète nous assure qu'il existe $e_{p+1}, \dots, e_n$ tels que $(e_1, \dots, e_n)$ soit une base de $\mathbb{R}^n$. Dans cette base, puisque F est stable par u, cette dernière a pour matrice

$$\mathrm{M}_u = \begin{pmatrix} \mathrm{M}_v & \mathrm{B} \\ 0_{n-p,p} & \mathrm{C} \end{pmatrix}$$

et par conséquent le polynôme caractéristique de u est

$$\begin{vmatrix} \mathrm{M}_v - \mathrm{X}\,\mathrm{Id}_{\,p} & \mathrm{B} \\ 0_{n-p,p} & \mathrm{C} - \mathrm{X}\,\mathrm{Id}_{\,n-p} \end{vmatrix}$$

soit d'après la question I.1.c,

$$\chi_u = \chi_v \chi_{\mathrm{C}}$$

d'où $$\boxed{\chi_v \text{ divise } \chi_u}$$

I.3 L'espace $\mathrm{F}_u(x)$ contient 0 (le polynôme nul le montre). Si y et z sont dans $\mathrm{F}_u(x)$, avec $y = \mathrm{P}(u)(x)$ et $z = \mathrm{Q}(u)(x)$, et si λ est un réel quelconque, les polynômes $\mathrm{P}+\mathrm{Q}$ et $\lambda\mathrm{P}$ donnent

$$y + z = (\mathrm{P}+\mathrm{Q})(u)(x) \in \mathrm{F}_u(x) \qquad \text{et} \qquad \lambda y = (\lambda\mathrm{P})(u)(x) \in \mathrm{F}_u(x)$$

donc $$\boxed{\mathrm{F}_u(x) \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathbb{R}^n.}$$

De plus, pour tout P de $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$, $u \circ (\mathrm{P}(u)) = \mathrm{Q}(u)$ avec $\mathrm{Q}(\mathrm{X}) = \mathrm{P}(\mathrm{X})\mathrm{X}$, et par conséquent

$$\boxed{\mathrm{F}_u(x) \text{ est stable par } u.}$$

I.4.a Puisque $\mathbb{R}^n$ est de dimension n, la famille $(x, u(x), \dots, u^n(x))$ (qui comporte $n+1$ éléments) est liée.

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Il existe un plus petit entier } q \text{ tel que} \\ (x, u(x), \dots, u^q(x)) \text{ soit liée.}\end{array}}$$

I.4.b Si $a_q = 0$, alors puisque les a_i sont non tous nuls, la combinaison linéaire

$$\sum_{j=0}^{q} a_j u^j(x) = \sum_{j=0}^{q-1} a_j u^j(x) = 0$$

(non triviale) montre que la famille $(x, u(x), \dots, u^{q-1}(x))$ est liée, ce qui contredit la minimalité de q. Par conséquent,

$$\boxed{a_q \neq 0}$$

En posant pour tout $i \in \{0, 1, \dots, q\}$, $\alpha_i = \dfrac{a_i}{a_q}$, on a

$$u^q(x) = -\sum_{i=0}^{q-1} \alpha_i u^i(x)$$

Puisque la famille $(x, u(x), \dots, u^{q-1}(x))$ est libre, il suffit de montrer qu'elle est génératrice de $\mathrm{F}_u(x)$. Or il suffit pour cela de montrer qu'elle engendre tous les $u^p(x)$,