Mines Physique 2 MP 2000 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Nancy Loosemore (ENS Lyon) ; il a été relu par Jean-David Picon (École Polytechnique) et Jean-Yves Tinevez (ENS Lyon).

Le sujet se divise en deux problèmes indépendants, tous deux se subdivisant en trois parties, dont presque toutes peuvent être traitées séparément.

Le premier problème étudie l'impact d'une comète sur la Terre. Une section utilise les notions de forces centrales ; elle concerne le mouvement de la Terre et de la comète avant la collision. La suite fait intervenir de la mécanique plus générale, ainsi que quelques notions de thermodynamique. On y étudie la descente de la comète à travers l'atmosphère, puis les conséquences pour le bilan énergétique de la surface de la Terre.

Le second problème porte sur les ondes électromagnétiques. Après avoir étudié les milieux conducteurs, le sujet se tourne vers l'étude d'un guide d'ondes, qui diffère des guides d'ondes « classiques » par l'existence d'une couche isolante entre métal et vide. On utilisera ici les relations de passage des champs à la surface de séparation entre les milieux.

Indications

Premier problème

3 Utiliser la conservation de l'énergie, la conservation du moment cinétique bien entendu, ainsi que le fait qu'aux points $d_{\min}$ et $d_{\max}$, on a $\dot{r} = 0$. C'est-à-dire que la vitesse est orthoradiale... Ceci donne deux équations contenant $v_{\min}$ et $v_{\max}$.

5 L'obtention de la vitesse relative nécessite de considérer la direction des mouvements de la Terre et de la comète.

7 Estimer la masse de la couche dans laquelle se trouve la concentration la plus élevée d'iridium.

8 C'est le poids de cette colonne d'air qui génère la pression P_0 à la surface de la Terre.

9 Bien noter toutes les variables du problème en distinguant les deux cas : avec et sans atmosphère. Pour estimer la différence de variation d'énergie cinétique et potentielle, il faudra entre autre calculer la vitesse de la comète et de la surface de la Terre, dans le cas sans atmosphère, estimer la masse de l'atmosphère, ainsi que relier G à g pour obtenir une valeur numérique de G, non fournie par l'énoncé.

12 On parle ici de la puissance par unité de surface au niveau de la haute atmosphère.

14 Essayer d'estimer l'ordre de grandeur.

15 Effectuer un bilan énergétique pour la surface de la Terre. Attention au fait que la puissance rayonnée par le projectile n'est pas entièrement dirigée vers le sol.

Second problème

18 Un bon conducteur a une conductivité élevée. On peut donc s'attendre à ce que $\varepsilon_0 \dfrac{\partial \overrightarrow{\mathrm{E}}}{\partial t}$ soit négligeable devant $\overrightarrow{j}$. Reste à le vérifier en utilisant le fait que $\overrightarrow{\mathrm{E}}$ est harmonique...

19 Utiliser la formule du début avec trois des équations de Maxwell.

20 Le champ électrique respecte les invariances de l'espace. De plus, sachant que $\overrightarrow{\mathrm{E}}$ est harmonique, on pourra chercher les solutions sous la forme $\overrightarrow{\mathrm{E}}(x,t) = \overrightarrow{\mathrm{E}}(x)e^{i\omega t}$. Il faut alors résoudre une équation du second ordre en x.

22 $\dfrac{\partial \overrightarrow{\mathrm{E}}}{\partial t}$ peut être relié à $\overrightarrow{\mathrm{E}}$ encore une fois. L'équation à utiliser est donc $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{\mathrm{B}} = \varepsilon_r \varepsilon_0 \mu_0 \dfrac{\partial \overrightarrow{\mathrm{E}}}{\partial t}$.

23 Se rappeler de la question 19.

24 Les équations de la question 23 étant de la forme $\mathrm{B_0}''(x) + a\mathrm{B_0}(x) = 0$, discuter la forme des solutions en fonction du signe de a.

26 Le milieu II est un isolant. Il ne peut pas supporter de courant surfacique.

29 S'intéresser aux signes de α et β permet de conclure que les membres de droite des deux équations de la question précédente ont même signe...

31 Tracer les deux courbes. Celle en $X \tan X$ peut être faite très approximativement. Ceci permet de visualiser où se trouvent les solutions, en gardant à l'esprit les signes de α et β.

32 Le n^{e} mode n'existe que si la pulsation ω est suffisamment élevée...

Premier problème : l'extinction des dinosaures

Première partie : mouvements cométaires

1 D'après l'énoncé, l'orbite de la Terre est supposée circulaire. La vitesse angulaire de la Terre est donc constante. Notons-la ω. On a les deux relations

$$v_0 = a\,\omega \quad \text{et} \quad \omega = \frac{2\pi}{T_0}$$

Sachant que $T_0 = 365$ jours, la vitesse vaut

$$v_0 = 3,0\,.10^4 \text{ m.s}^{-1}$$

2 Projetons la relation fondamentale de la dynamique radialement, sachant que la Terre n'est soumise qu'à l'attraction gravitationnelle du soleil. Puisque son orbite est supposée circulaire, son accélération radiale peut s'écrire

$$a_r = -\frac{v^2}{r}$$

Avec $v = v_0$ et $r = a$ ici, on obtient

$$-\frac{G\,M_S\,M_T}{a^2} = -M_T\,\frac{{v_0}^2}{a}$$

soit

$$G\,M_S = a\,{v_0}^2$$

3 La conservation de l'énergie de la comète s'écrit

$$\frac{1}{2}\,m\,v^2 - \frac{G\,M_S\,m}{r} = C^{te}$$

v_{max} correspond donc au point où la distance entre comète et soleil est minimale et v_{min} au point où cette distance est maximale.

Par conséquent,
$$\frac{1}{2}\,m\,{v_{max}}^2 - \frac{G\,M_S\,m}{d_{min}} = \frac{1}{2}\,m\,{v_{min}}^2 - \frac{G\,M_S\,m}{d_{max}} \qquad (\mathbf{1})$$

Une deuxième relation s'obtient à partir de la conservation du moment cinétique, qui est assurée ici parce que le système est un système à force centrale.

Il vient
$$m\,r^2\,\dot{\theta} = C^{te}$$

Aux points où $r = d_{min}$ et $r = d_{max}$, la vitesse de la comète est dirigée orthoradialement (en effet, par définition de ces points $\dot{r} = 0$ donc $v = r\dot{\theta}$) et par conséquent

$$v_{max} = d_{min}\,\dot{\theta}_{max} \qquad v_{min} = d_{max}\,\dot{\theta}_{min}$$