Centrale Physique MP 2000 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Matthieu Lefrançois (ENS Lyon) ; il a été relu par Yannick Alméras (ENS Ulm) et Sandrine Martins (École Supérieure de Physique et de Chimie de Paris).

Le problème porte sur l'étude d'une lampe à incandescence.

La partie I décrit le fonctionnement de la lampe en régime stationnaire (indépendant du temps). Dans un premier temps, on étudie la variation de la résistance du filament en fonction de la température, puis on s'intéresse au rayonnement émis.

La partie II s'intéresse au fonctionnement du filament en régime alternatif, d'abord en régime sinusoïdal puis dans le cas d'un signal rectangulaire de rapport cyclique α. La partie II.C porte sur l'étude de la réponse d'une photodiode en fonction du rayonnement du filament.

La partie III fait intervenir l'association photodiode-filtre interférentiel. On vérifie la loi de Stefan et on calcule le rapport $\dfrac{hc}{k_{\mathrm{B}}}$.

Indications

Partie I

I.A.2 Exprimer R en fonction de la résistivité ρ.

I.A.3.a Calculer L(T) en fonction de α.

I.B.3 Utiliser la loi du déplacement de Wien.

I.B.4 Étudier les longueurs d'onde d'émission et d'absorption.

I.B.6 Utiliser le fait que $r \ll \mathrm{L}$ pour simplifier l'expression de T.

I.B.9 Se souvenir que $\mathrm{R} = \dfrac{\mathrm{U}}{\mathrm{I}}$ et que $\mathrm{P_r} = \mathrm{UI}$.

I.C.1 Raisonner sur les dimensions respectives du support et du filament.

I.C.3 Écrire la condition aux limites pour x grand ($\mathrm{T} = \mathrm{T_0}$).

I.C.4 Multiplier l'équation par $\dfrac{\mathrm{dT}}{\mathrm{d}x}$ et intégrer en utilisant les conditions aux limites.

Partie II

II.A.1.a Écrire la relation entre c_p et l'enthalpie H.

II.A.1.b Faire attention à la définition de chaque terme afin de ne pas se tromper de signe.

II.A.3.b Transformer l'expression obtenue à la question II.A.3.a en utilisant des relations de trigonométrie.

II.B.1 Analyser l'intensité émise pour certaines valeurs particulières de α ou raisonner sur la densité spectrale.

II.B.3 Écrire l'expression de $\mathrm{P_e}(t)$ en fonction de $u_\mathrm{a}(t)$ et comparer l'expression des coefficients de Fourier.

II.C.1.a Raisonner sur la position et l'orientation dans l'espace.

II.C.1.b Introduire l'angle solide adéquat.

II.C.1.d Effectuer un développement limité de u_s étant donné que $\theta \ll \mathrm{T_0}$.

II.C.3 Examiner les variations de l'ordonnée à l'origine en fonction de $\mathrm{T_0}$.

Partie III

III.D Faire une approximation numérique afin de simplifier le dénominateur de $\dfrac{\mathrm{d}\varphi_\mathrm{e}}{\mathrm{d}\lambda}$.

Partie I Lampe à incandescence en régime permanent

I.A.1 La loi d'Ohm s'écrit :

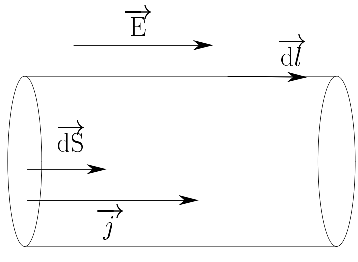
$$\boxed{\overrightarrow{j} = \frac{1}{\rho}\overrightarrow{\mathrm{E}}}$$

> Traditionnellement, la première question d'une sous-partie est souvent une question de cours relativement simple (ici, la loi d'Ohm locale).

I.A.2 On considère le filament de longueur L et de rayon r.

On a la relation $$\mathrm{R} = \rho\frac{\mathrm{L}}{\mathrm{S}}$$

d'où $$\boxed{\mathrm{R} = \rho\frac{\mathrm{L}}{\pi r^2}} \qquad (\mathbf{1})$$

> La démonstration de ce résultat hyper-classique peut être demandée, alors autant la connaître. Le principe est de calculer R en déterminant le rapport entre la tension (circulation de $\overrightarrow{\mathrm{E}}$ le long d'une ligne de champ) et l'intensité (flux de $\overrightarrow{j}$ à travers la surface engendrée par les lignes de champ).
>
> 
>
>
> On a donc $$\mathrm{R} = \frac{\displaystyle\int_{\mathcal{C}} \overrightarrow{\mathrm{E}}\,.\overrightarrow{\mathrm{d}l}}{\displaystyle\iint_{\mathcal{S}} \frac{1}{\rho}\overrightarrow{\mathrm{E}}\,.\,\overrightarrow{\mathrm{dS}}} = \frac{\mathrm{E}\,.\,\mathrm{L}}{\dfrac{1}{\rho}\,\mathrm{E}\,.\,\mathrm{S}}$$
>
> car E est constant le long de la ligne de champ.
>
> Finalement : $$\mathrm{R} = \rho\,\frac{\mathrm{L}}{\pi\,r^2}$$

De (**1**), on tire : $$\mathrm{L} = \pi\frac{\mathrm{R}r^2}{\rho}$$

A.N : $$\mathrm{L} = 3{,}97\ \mathrm{cm}$$

> La valeur trouvée pour L justifie la valeur prise par l'énoncé.

I.A.3.a On calcule l'expression de L en fonction de T :

$$\alpha = \frac{1}{\mathrm{L}}\frac{\mathrm{dL}}{\mathrm{dT}} = \frac{\mathrm{d}\ln(\mathrm{L})}{\mathrm{dT}}$$

Par intégration,

$$\ln\frac{\mathrm{L}(\mathrm{T}_0)}{\mathrm{L}(\mathrm{T}_\mathrm{A})} = \alpha(\mathrm{T}_0 - \mathrm{T}_\mathrm{A})$$

$$\frac{\mathrm{L}(\mathrm{T}_0)}{\mathrm{L}(\mathrm{T}_\mathrm{A})} = \mathrm{e}^{\alpha(\mathrm{T}_0 - \mathrm{T}_\mathrm{A})}$$

Donc

$$\boxed{\frac{\Delta\mathrm{L}}{\mathrm{L}} = \mathrm{e}^{\alpha(\mathrm{T}_0 - \mathrm{T}_\mathrm{A})} - 1}$$

I.A.3.b On se sert de l'expression de ρ pour calculer $\dfrac{\Delta\rho}{\rho}$.

$$\frac{\Delta\rho}{\rho(\mathrm{T}_\mathrm{A})} = \frac{\rho(\mathrm{T}_0) - \rho(\mathrm{T}_\mathrm{A})}{\rho(\mathrm{T}_\mathrm{A})}$$

$$\boxed{\frac{\Delta\rho}{\rho(\mathrm{T}_\mathrm{A})} = \frac{a(\mathrm{T}_0^2 - \mathrm{T}_\mathrm{A}^2) + b(\mathrm{T}_0 - \mathrm{T}_\mathrm{A})}{a\mathrm{T}_\mathrm{A}^2 + b\mathrm{T}_\mathrm{A}}}$$

I.A.3.c Les applications numériques donnent :

$$\frac{\Delta\mathrm{L}}{\mathrm{L}(\mathrm{T}_\mathrm{A})} = \frac{\Delta r}{r(\mathrm{T}_\mathrm{A})} = 1,04.10^{-2} \qquad \text{et} \qquad \frac{\Delta\rho}{\rho(\mathrm{T}_\mathrm{A})} = 9{,}8$$

On se rend compte que la variation de la résistivité prédomine devant la dilatation thermique. Par conséquent, dans l'expression de R, seule la dépendance de ρ par rapport à T est à considérer. On a donc :

$$\mathrm{R} = (a\mathrm{T}^2 + b\mathrm{T})\,\frac{\mathrm{L}(\mathrm{T}_\mathrm{A})}{\pi\, r(\mathrm{T}_\mathrm{A})^2}$$

soit

$$\boxed{\mathrm{R} = \mathrm{R}_\mathrm{A}\,\frac{a\mathrm{T}^2 + b\mathrm{T}}{a\mathrm{T}_\mathrm{A}^2 + b\mathrm{T}_\mathrm{A}}} \qquad (\mathbf{2})$$

I.A.4 Pour remplir le tableau, il faut calculer $\mathrm{R} = \dfrac{\mathrm{U}}{\mathrm{I}}$ puis déterminer T à partir de l'équation (**2**).

U(V)	1,25	3,07	4,20	5,60	6,86	8,65
I(A)	0,237	0,386	0,460	0,539	0,603	0,685
R(Ω)	5,27	7,95	9,13	10,39	11,38	12,63
T(K)	1416	2019	2268	2525	2720	2960

I.B.1 L'émittance d'un corps est la puissance rayonnée par unité de surface :

$$\mathrm{d}\varphi = \mathrm{M}\,\mathrm{dS}$$

L'émittance d'un corps noir ne dépend que de sa température et obéit à la loi de Stefan :