# X Maths 2 MP 2000 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Francesco Colonna-Romano (ENS Ulm) et Sébastien Desreux (ENS Ulm) ; il a été relu par Serge Bellaïche (ENS Ulm) et Éric Ricard (ENS Ulm).

Ce sujet s'intéresse aux combinaisons linéaires d'une famille finie de vecteurs lorsqu'on impose aux coefficients d'être positifs. Les ensembles obtenus ressemblent à des « cônes » présentant des faces (et appelés pour cette raison « cônes à faces »), dont on étudie certaines propriétés géométriques et topologiques.

Les connaissances requises sont assez élémentaires ; elles concernent les espaces euclidiens et la topologie des espaces vectoriels normés. Une bonne connaissance de la géométrie permettra une approche intuitive des questions difficiles, mais la rédaction doit être très rigoureuse, en particulier dans les questions de topologie.

La difficulté du sujet est nettement progressive. Si les deux premières parties sont relativement simples, la fin se révèle plutôt ardue, avec des questions délicates dont la rédaction est de surcroît longue.

Le problème se compose de quatre parties, qui ne sont pas indépendantes, mais dont on peut sans peine admettre le résultat final qui, seul, servira dans les parties suivantes.

La première partie traite simplement quelques exemples afin de se familiariser avec les définitions ; la deuxième montre qu'un cône à faces est fermé ; la troisième associe à chaque cône un ensemble dual $\mathrm{C}^+$ (appelé polaire) vérifiant $(\mathrm{C}^+)^+ = \mathrm{C}$ ; la quatrième enfin montre qu'un cône à faces est l'intersection d'une famille finie de demi-espaces, ce qui permet de conclure que $\mathrm{C}^+$ est lui-même un cône.

## Indications

4.a Utiliser la caractérisation d'un fermé par des suites.

5.a Appliquer le résultat de la question 4.a après avoir montré que K est compact et ne contient pas 0.

5.b Montrer que P(C) est le cône à faces engendré par les $\mathrm{P}(c_i)$ et que ces derniers sont dans C.

5.c On pourra considérer $\mathrm{V}' = \mathrm{V}+\mathrm{D}$, où D est la droite vectorielle que contient P(C).

5.d Utiliser la question 5.c pour se ramener au cas où P(C) ne contient pas de droites vectorielles, puis déduire des questions 5.a et 5.b que P(C) est fermé, et enfin remarquer que C est l'image réciproque du fermé P(C) par P.

6.a Utiliser un argument de compacité pour l'existence et l'identité du parallélogramme :

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

pour l'unicité.

6.b Paramétrer le segment $]\, c\,; p(a)\,]$ (où $c \in \mathrm{C}$) par l'application

$$t \longmapsto tc + (1-t)p(a)$$

Constater que chaque point du segment est plus éloigné de $a$ que $p(a)$ lui-même et particulariser au cas $c = (1+\varepsilon)p(a)$.

6.c Pour prouver que $(\mathrm{C}^+)^+ \subset \mathrm{C}$, montrer que si $a \in (\mathrm{C}^+)^+$ alors $a = p(a)$ en remarquant que $(p(a)-a) \in \mathrm{C}^+$ d'après la question 6.b.

7 Pour montrer $(\beta) \Longrightarrow (\alpha)$, construire explicitement une base de E composée de vecteurs de C, à partir d'une base de E et d'un point $x$ intérieur à C.

Pour montrer $(\alpha) \Longrightarrow (\beta)$, contruire le point intérieur à C comme un point ayant toutes ses coordonnées strictement positives dans une base de E composée de vecteurs de C.

8.a Pour montrer que $(\beta') \Longrightarrow (\alpha')$, constater que si $x \in \mathrm{C} \cap \{w\}^\perp$ alors la boule $\mathrm{B}(x,\varepsilon)$ contient le vecteur $x - \varepsilon w/\|w\|$, qui n'est pas dans C.

Pour montrer $(\alpha') \Longrightarrow (\beta')$, raisonner par contraposée. En prenant un $x$ ne vérifiant pas $(\beta')$, montrer qu'il existe un réel $m_x$ tel que

$$w \in \mathrm{C}^+ \quad \Longrightarrow \quad (x|w) \geqslant m_x \, \|w\|$$

(On peut montrer que $\mathrm{C}^+$ est fermé et se restreindre au cas où $w$ est de norme 1.) Démontrer ensuite que la boule de centre $x$ et de rayon $m_x$ est contenue dans C.

8.c Construire un point frontière de C sur le segment $[\, x\,; x_0\,]$, puis appliquer la question 8.a.

9.a Montrer que toute face est un cône à faces engendré par un nombre fini de $c_i$.

9.b Considérer l'intersection des demi-espaces ${w_i}^+$ où les $w_i$ servent à définir les faces. Supposer d'abord que les conditions de la question 7 sont réalisées, et s'y ramener dans le cas contraire. On aura besoin des questions 8.c et 9.a.

10 Montrer que $\mathrm{C}^+$ est le cône engendré par les vecteurs définissant les demi-espaces de la question 9.b. On pourra utiliser la relation $(\mathrm{C}^+)^+ = \mathrm{C}$.

## Première partie

**1** Soit F un sous-espace vectoriel de E de dimension $m$, et soit $(c_1, \ldots, c_m)$ une base de F. On pose $c_{m+i} = -c_i$ pour $i \in [\![\, 1\,;\, m \,]\!]$.

On vérifie alors que F est le cône à faces engendré par $(c_1, \ldots, c_{2m})$. En effet, toute combinaison linéaire positive de $c_1, \ldots, c_{2m}$ étant une combinaison des $c_1, \ldots, c_m$ , elle est dans F. Réciproquement, tout $x \in \mathrm{F}$ s'écrit

$$x = \sum_{1}^{m} \lambda_i c_i = \sum_{\lambda_i \geqslant 0} \lambda_i c_i + \sum_{\lambda_i \leqslant 0} |\lambda_i| c_{m+i}$$

donc $x$ est dans le cône engendré par les $c_i$.

Finalement, on a montré le résultat suivant :

$$\boxed{\text{Tout sous-espace vectoriel de E est un cône à faces.}}$$

**2** Lorsque $n = r = 2$, il faut distinguer trois cas.

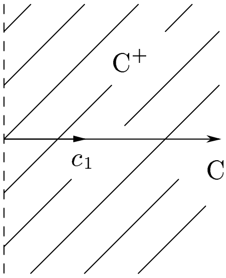
> Ce sont bien les seuls cas à envisager car les $c_i$ ne sont pas nuls par hypothèse.

a) **$\mathbf{c_1}$ et $\mathbf{c_2}$ sont colinéaires et de même sens**

C est alors la demi-droite dirigée par $c_1$ ou $c_2$ (c'est en fait le cône engendré par $c_1$ seul). $\mathrm{C}^+$ est le demi-plan contenant C défini par

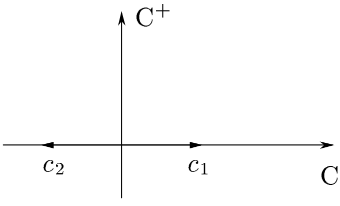
$$\{w \in \mathrm{E}_1 \mid (w|c_1) \geqslant 0\}$$

Les faces de C sont $\{0\}$ (par exemple pour $w = c_1$) et C entier (pour $w \in {c_1}^{\perp}$).

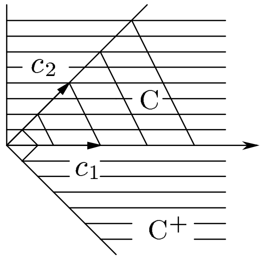


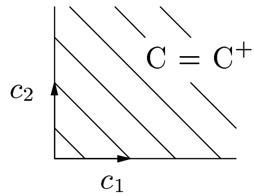

b) **$\mathbf{c_1}$ et $\mathbf{c_2}$ sont colinéaires et de sens opposé**

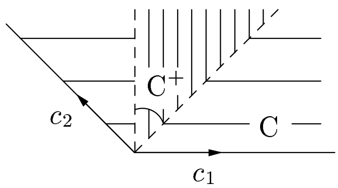
Ici C est la droite contenant $c_1$ et $c_2$ , $\mathrm{C}^+$ est la perpendiculaire à C passant par O, et la seule face de C est C entier.




c) Enfin, il y a le cas non dégénéré où $c_1$ et $c_2$ ne sont pas colinéaires. On peut faire plusieurs types de dessins, suivant que l'angle entre $c_1$ et $c_2$ est aigu ou obtus.




Ici les faces sont C entier (pour $w = 0$), $\{0\}$ (pour $w$ à l'intérieur de $\mathrm{C}^+$) et les demi-droites $\mathbb{R}_+ \, c_1$ et $\mathbb{R}_+ \, c_2$ (pour $w$ sur la frontière de $\mathrm{C}^+$).

**3** Si $n = r = 3$, et si $(c_1, c_2, c_3)$ forme une base orthogonale de E, alors C est la portion d'espace (c'est un huitième d'espace) définie par $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$ et $z \geqslant 0$.

De plus, par définition de $\mathrm{C}^+$, le produit scalaire d'un élément $w$ de $\mathrm{C}^+$ avec les $c_i$ (c'est-à-dire ses coordonnées dans la base $(c_1, c_2, c_3)$) est positif, donc $c \in \mathrm{C}$ : $\mathrm{C}^+ \subset \mathrm{C}$. Réciproquement, si $x \in \mathrm{C}$, on voit que son produit scalaire avec un élément de C est positif : $\mathrm{C} \subset \mathrm{C}^+$. En conclusion, $\mathrm{C} = \mathrm{C}^+$.

Les faces de C sont maintenant :

- C entier (pour $w = 0$) ;
- $\{0\}$ (par exemple pour $w = \lambda_1 c_1 + \lambda_2 c_2 + \lambda_3 c_3$ avec tous les $\lambda_i$ non nuls) ;
- les quarts de plan engendrés par deux des $c_i$ (du type $\mathbb{R}_+ c_i + \mathbb{R}_+ c_j$), qui sont obtenus pour $w \in \{c_1 \, , c_2 \, , c_3\}$ ;
- et enfin les demi-droites engendrées par un seul $c_i$ (obtenues par exemple pour $w = \lambda_1 c_1 + \lambda_2 c_2$, avec $\lambda_1$ et $\lambda_2$ tous deux non nuls).