Centrale Maths 2 MP 2000 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Tri Nguyen-Huu (ENS Lyon) ; il a été relu par Clotilde Breuillin (Mines de Paris), Brice Goglin (ENS Lyon) et Thomas Chomette (ENS Ulm).

Ce problème est composé de six parties. Le but est d'étudier un algorithme permettant un calcul approché des valeurs propres d'une matrice réelle symétrique : la méthode de Jacobi.

- La partie I se propose de définir une norme sur les matrices. Elle permet de démontrer quelques résultats classiques.
- Dans la partie II, on explicite une méthode de diagonalisation pour les matrices carrées symétriques d'ordre 2. La fin de cette partie consiste à appliquer cette méthode à un exemple.
- La troisième partie cherche à analyser la méthode précédente dans le cas de matrices d'ordre quelconque. Elle présente le principe d'une itération de la méthode de Jacobi.
- La quatrième partie a pour but de montrer la convergence de suites vérifiant certaines propriétés, résultat nécessaire pour la suite du problème.
- La cinquième partie expose le principe de la méthode de Jacobi et cherche à prouver qu'elle converge bien.
- Enfin, on trouve dans la partie VI un exemple de matrice d'ordre 3 à laquelle on applique l'algorithme défini précédemment.

Cette épreuve est relativement longue et comporte de nombreux calculs dans lesquels on peut se perdre facilement. C'est un bon exercice pour acquérir certains automatismes et éviter ainsi d'être déstabilisé le jour de l'épreuve.

Indications

I.C Démontrer l'inégalité lorsque $a_{i,j} = 0$ pour $i \neq j$ en utilisant la convexité de $(x \longmapsto x^2)$.

II.C Si cela n'a pas déjà été fait, faire apparaître des termes en 2θ dans l'expression de $b_{1,2}$. De plus, avoir lu l'énoncé en entier peut donner une idée de la valeur à trouver...

II.E Utiliser les formules

$$\cos\left(\text{Arctan } x\right) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \qquad \text{et} \qquad \sin\left(\text{Arctan } x\right) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

IV.A.1 Extraire une suite de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et considérer une de ses valeurs d'adhérence.

IV.A.2 Choisir $\varepsilon < \dfrac{1}{2} \mathop{\text{Min}}\limits_{1\leqslant\lambda,\mu\leqslant \text{M}} \|a_\lambda - a_\mu\|$ et considérer $n_0 \geqslant n_\varepsilon$ tel que

$$n \geqslant n_0 \qquad \|x_{n+1} - x_n\| < \frac{1}{2} \mathop{\text{Min}}_{1\leqslant\lambda,\mu\leqslant \text{M}} \|a_\lambda - a_\mu\| - 2\varepsilon$$

V.C.2 Montrer que $\|\text{A}_{k_l} - \Delta\|$ tend vers 0 et remarquer que les A_{k_l} ont tous le même polynôme caractéristique.

V.D.2 Montrer que $(\text{D}_{k+1} - \text{D}_k)$ tend vers 0 coefficient par coefficient. Puis utiliser la question III.B.2 pour réécrire les termes $a_{i,i}^{(k+1)}$.

VI.A Utiliser les formules

$$|\cos x| = \sqrt{\frac{1+\cos 2x}{2}} \qquad \text{et} \qquad |\sin x| = \sqrt{\frac{1-\cos 2x}{2}}$$

I. Une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

I.A Utilisons la définition de la fonction Tr :

$$\begin{aligned}
\operatorname{Tr}(\mathrm{AB}) &= \sum_{i=1}^{n} (\mathrm{AB})_{i,i} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} b_{j,i} \\
&= \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} b_{j,i} a_{i,j} \\
\operatorname{Tr}(\mathrm{AB}) &= \sum_{j=1}^{n} (\mathrm{BA})_{j,j}
\end{aligned}$$

On en déduit que $\boxed{\operatorname{Tr}(\mathrm{AB}) = \operatorname{Tr}(\mathrm{BA})}$

I.B φ vérifie les propriétés suivantes :

- Φ est clairement bilinéaire ;
- Φ est symétrique :
$$\begin{aligned}
\Phi(\mathrm{A},\mathrm{B}) &= \operatorname{Tr}(\mathrm{A}\,{}^t\mathrm{B}) \\
&= \operatorname{Tr}({}^t(\mathrm{A}\,{}^t\mathrm{B})) \\
&= \operatorname{Tr}(\mathrm{B}\,{}^t\mathrm{A}) \\
\Phi(\mathrm{A},\mathrm{B}) &= \Phi(\mathrm{B},\mathrm{A})
\end{aligned}$$
- Φ est définie positive : pour tout A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a
$$\Phi(\mathrm{A},\mathrm{A}) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (\mathrm{A})_{i,j} ({}^t\mathrm{A})_{j,i} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}^2$$
On en déduit que
$$\Phi(\mathrm{A},\mathrm{A}) \geqslant 0 \quad \text{et} \quad \Phi(\mathrm{A},\mathrm{A}) = 0 \text{ si et seulement si } a_{i,i} = 0 \text{ pour tout } i$$
soit $$\Phi(\mathrm{A},\mathrm{A}) \geqslant 0 \quad \text{et} \quad \Phi(\mathrm{A},\mathrm{A}) = 0 \text{ si et seulement si } \mathrm{A} = 0.$$
- Conclusion : $\mathrm{A} \longmapsto \Phi(\mathrm{A},\mathrm{A})$ est une forme quadratique définie positive.

$$\boxed{\Phi \text{ est donc un produit scalaire.}}$$

En conséquence, on a

$$\boxed{\|\mathrm{A}\|^2 = \Phi(\mathrm{A},\mathrm{A}) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}^2}$$

I.C La fonction $(x \longmapsto x^2)$ est convexe. Quels que soient les coefficients $a_{i,i}$, on peut alors écrire

$$\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} a_{i,i}\right)^2 \leqslant \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} a_{i,i}^2$$

soit encore $$\left(\sum_{i=1}^{n} a_{i,i}\right)^2 \leqslant n \sum_{i=1}^{n} a_{i,i}^2$$

Or, on a clairement $$\sum_{i=1}^{n} a_{i,i}^2 \leqslant \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}^2$$

> L'inégalité est valable pour toute matrice carrée A. En particulier, elle doit rester vraie lorsque les termes $a_{i,j}$ sont nuls pour $i \neq j$. Ne pas s'apercevoir tout de suite que ces termes ne jouent aucun rôle dans l'égalité rend le problème beaucoup plus difficile.
>
> C'est une bonne illustration de problèmes pour lesquels se ramener à des cas particuliers (ici une matrice diagonale) n'est pas une perte de temps et permet d'avoir une vision plus nette de la marche à suivre.

Il vient donc $$\boxed{\left(\sum_{i=1}^{n} a_{i,i}\right)^2 \leqslant n \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}^2}$$

> Une autre méthode consiste à utiliser le fait que $a^2 + b^2 \geqslant 2ab$ (que l'on a déduit de l'inégalité $(a-b)^2 \geqslant 0$). On a alors
> $$\left(\sum_{i=1}^{n} a_{i,i}\right)^2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{i,i}a_{j,j} \leqslant \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{a_{i,i}^2 + a_{j,j}^2}{2}$$
> or $$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{a_{i,i}^2 + a_{j,j}^2}{2} = n\sum_{i=1}^{n} a_{i,i}^2$$
> d'où l'on déduit le résultat.

Il vient donc naturellement pour une matrice A

$$|\operatorname{Tr}(\mathrm{A})| \leqslant \sqrt{n}\|\mathrm{A}\|$$

en d'autres termes $$|||\operatorname{Tr}||| = \operatorname*{Sup}_{\mathrm{A}\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})} \frac{|\operatorname{Tr}(\mathrm{A})|}{\|\mathrm{A}\|} \leqslant \sqrt{n}$$

De plus, la borne supérieure est atteinte en I_n, ce qui signifie que l'on a

$$\boxed{|||\operatorname{Tr}||| = \sqrt{n}}$$

I.D Reprenons la définition de la norme. On a

$$\|\Omega\mathrm{A}\|^2 = \operatorname{Tr}(\Omega\mathrm{A}\,{}^t(\Omega\mathrm{A})) = \operatorname{Tr}(\Omega\mathrm{A}\,{}^t\mathrm{A}\,{}^t\Omega) = \operatorname{Tr}({}^t\Omega\,\Omega\,{}^t\mathrm{A}\,\mathrm{A})$$

Comme Ω appartient à $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, on a ${}^t\Omega\,\Omega = \mathrm{I}_n$; il en découle que

$$\|\Omega\mathrm{A}\| = \|\mathrm{A}\|$$

Si A est une matrice symétrique, on a par définition

$${}^t\mathrm{A} = \mathrm{A}$$