Mathématiques 2

Présentation du sujet

Le sujet est constitué d'une étude du groupe orthogonal généralisé et en particulier du groupe de Lorentz, dont les propriétés sont utilisées dans la théorie de la relativité restreinte. Il fait appel principalement à des notions d'algèbre bilinéaire et de géométrie.

Analyse globale des résultats

Le sujet est progressif, d'une longueur et d'une difficulté bien adaptées à la filière. Les meilleurs candidats, qui ont pratiquement traité toutes les questions, ont su mettre en valeur leur maitrise du cours et leur capacité de recul par rapport à celui-ci ; le nombre de copies présentant un contenu mathématique famélique semble, quant à lui, en légère baisse.

Commentaires sur les réponses apportées et conseils aux candidats

La présentation des copies est dans l'ensemble convenable, même si malheureusement quelques candidats irréductibles semblent mettre un point d'honneur à rendre un travail constellé de ratures et sanctionné en conséquence. Comme d'habitude, il est vivement conseillé de mettre en valeur les résultats obtenus en les encadrant.

La première partie du problème, relativement facile, a logiquement été la mieux traitée. À noter toutefois que la notion de sous-groupe (question **I.A.3**) est souvent floue (stabilité par passage à l'inverse en particulier), quand elle n'est pas confondue avec celle de sous-espace vectoriel ; la question **I.A.4** a, quant à elle, donné lieu à diverses tentatives de tromperie, la plus commune consistant à décréter que les éléments de $O(1,p)$ sont des matrices orthogonales. La question suivante faisait appel à la topologie et a mis en évidence le fait que les candidats, s'ils mettent souvent en œuvre les notions adéquates (caractérisation séquentielle des fermés, ou image réciproque par une application continue), ont tendance à ne pas apporter toutes les justifications nécessaires.

La partie **I.B** commençait par une question « classique » qui a parfois donné lieu à d'étonnantes erreurs d'homogénéité ; ainsi, on a pu lire à maintes reprises que si X est un vecteur colonne, $X\,{}^tX$ représente le scalaire $\|X\|^2$. L'identité de polarisation (question **I.B.2**) a en revanche été souvent reconnue et énoncée correctement, tandis que la dernière question a mis en lumière l'absence de sens critique de certains candidats devant des équations manifestement trop simples pour être exactes.

La partie **II** débutait par une question d'apparence anodine mais qui nécessitait un peu de soin dans la rédaction ; trop de candidats ont hélas considéré que l'identité $\cosh^2 - \sinh^2 = 1$ était une réponse adéquate. La suite faisait à nouveau appel à des notions sur les (sous-)groupes et la topologie, la co-diagonalisabilité des matrices de $O^+(1,1)$ (**II.C**) permettant une résolution aisée de la dernière question.

La dernière partie étudiait un cas particulier ; plus calculatoire, elle demandait également plus de finesse dans les raisonnements et davantage d'esprit d'initiative. Elle a été en général moins abordée ; quant aux questions **III.E.2** et **III.H**, qui faisaient appel à la dextérité des candidats dans l'emploi d'un logiciel de calcul formel, elles ont surtout mis en lumière le peu de cas que ceux-ci font en général de Maple ou Mathematica. Si quelques erreurs bénignes de syntaxe sont aisément pardonnées, les bribes de programmes écrites dans un pseudo langage n'ayant qu'un rapport très éloigné avec celui des logiciels cités n'ont strictement rien rapporté à leurs auteurs.

Conclusions

Ce sujet, qui fait appel à l'algèbre bilinéaire, mais aussi dans une moindre mesure à l'analyse et à la géométrie, a permis un étalement important des notes. S'il était abordable par tous, sa longueur raisonnable a permis aux meilleurs candidats de faire montre de leur potentiel, pour la plus grande satisfaction du jury.