Mathématiques 2

Présentation du sujet

On connait la façon dont la multiplication complexe peut coder les rotations planes. Les quaternions ont été inventés par Hamilton (1843) pour généraliser cela à la dimension trois, mais ce sont finalement des quadruplets qu'il faut multiplier pour obtenir une loi de corps (non-commutatif) étendant celle des nombres complexes. Elle fournit une interprétation de la formule d'Euler montrant que le produit de deux sommes de quatre carrés en est aussi formellement une. Ce phénomène se rencontre aussi pour les sommes de huit carrés mais pas pour d'autres sommes, c'est le théorème de Hurwitz, objet des parties I et III du problème. La dernière partie présente une application classique des quaternions à l'arithmétique : tout entier positif est une somme de quatre carrés d'entiers (théorème de Lagrange).

La partie IV demande de fournir des algorithmes conduisant à la vérification du théorème de Lagrange pour un entier donné.

Analyse globale des résultats

Le comportement des candidats a été étroitement contraint par les difficultés relatives des parties. Ainsi n'ont vraiment été abordées que les parties I et II.

Le problème proposé ne demande pratiquement que des connaissances vues en première année. Mais ce retour aux fondamentaux a paru douloureux à beaucoup de candidats.

Ainsi les candidats ont été bien plus à l'aise pour traiter les calculs de la partie II que pour démontrer les égalités de sous-espaces ou les équivalences demandées dans certaines questions.

Commentaires sur les réponses apportées et conseils aux candidats

I.A.1.a Question quasi-évidente au vu de l'équation $s(y+z) = y - z$ mais qui demande tout de même une démonstration. Beaucoup de copies n'évoquent en fait que les inclusions $F \subseteq F_s$ et $G \subseteq G_s$.

I.A.1.c Ici il est important de distinguer les cas où F ou G est réduit à 0. Un espace propre est par définition non nul.

I.A.2.a Le fait que $F + G = E$ a souvent été omis.

I.B.1.a Ici comme en **I.A.1.a**, certains ont été tentés de raisonner par équivalence. Mais il ne suffit pas d'avoir écrit dans son raisonnement un signe $\Leftrightarrow$, parfois entre deux équations formellement équivalentes, pour que l'ensemble du paragraphe soit une équivalence. Ici les inclusions $t(F_s) \subseteq G_s$ et $t(G_s) \subseteq F_s$ (notons que l'une peut se déduire de l'autre en changeant s en $-s$) étaient les plus directes à montrer. Peu de candidats ont su voir qu'il suffisait d'appliquer t à ces inclusions pour obtenir les inclusions inverses.

I.B.1.b Cette question a pu dérouter même ceux qui avaient résolu la question précédente.

I.C.1 Cette question n'est pas utilisée dans la suite. Quelques candidats ont su s'inspirer du cours sur la réduction des endomorphismes (existence d'un polynôme annulateur) pour trouver et mettre en œuvre l'idée de montrer que les S_i forment un système linéairement indépendant.

Notons que cette inégalité est très grossière dans ce contexte — malgré la sophistication de sa preuve — et pourrait facilement être déduite de la question **I.D.2**.

I.C.2 Cette question a souvent été mal comprise.

I.D.1.a Des calculs parfois bien longs. Trop rares sont les utilisations de **I.B.1.a**.

I.D.1.c, **I.D.2** La récurrence suggérée est généralement bien conduite par les candidats parvenus à ce point du problème.

I.E.1 Les produits par blocs sont bien connus. Des oublis toutefois dans les vérifications.

I.E.2 La stratégie proposée est bien comprise et le résultat souvent juste pour ceux qui abordent cette question.

II.A.1.a On note un taux d'échec très élevé à cette question pourtant facile. La plupart des candidats répondent sur la dimension complexe, ou même sur la dimension de l'espace des vecteurs colonnes.

II.A.1.b Ici une source d'erreur est bien sûr d'avoir trouvé auparavant 4 pour la dimension de $\mathcal{C}$, ce qui justifie que $1, I, J, K$ forment un système libre dès lors qu'il est générateur. Même sans cette erreur, on voit beaucoup de démonstrations très maladroites.

II.A.1.c La question est bien comprise et relativement bien traitée. Elle peut aussi être vue comme une conséquence de la table de multiplication établie plus loin.

II.A.2 On trouve ici beaucoup de confusions avec la loi additive (générateurs, etc.).

Il convenait, en anticipant sur la suite de montrer que tout élément non-nul de $\mathbb{H}$ appartient au groupe linéaire et que son inverse est encore un élément de $\mathbb{H}$. Le premier point n'entraine pas l'autre. Il n'est pas non plus suffisant de dire que le produit matriciel est non-commutatif pour établir que $\mathbb{H} \setminus \{0\}$ est non-commutatif. Peu de candidats donnent un exemple de couple ne commutant pas, même si la suite du problème en fournissait.

II.A.3.a Rappelons que suivant la convention classique, dans une table de multiplication le produit A_iA_j se trouve sur la i-ème ligne et la j-ième colonne. Si une autre convention est suivie, cela doit être précisé.

II.B.1 De très nombreux candidats abordent ces questions. L'énoncé incitait à admettre que transposition et conjugaison commutent, ce qui peut aussi être argumenté brièvement. Notons que le fait que qq^* soit une homothétie est essentiel pour montrer aisément le d.

II.B.2 Cette question a été réussie par de nombreux candidats qui paraissent bien connaitre la propriété caractéristique de la trace.

Partie III Cette partie a été très peu abordée par les candidats.

Partie IV Ces questions d'algorithmiques sont abordées par à peine plus d'un candidat sur dix. Elles étaient pourtant à la fois élémentaires et intéressantes. On discerne très clairement quelques candidats efficaces dans ce type de problèmes mais beaucoup d'autres tombent facilement dans les quelques pièges de ces questions : on a ainsi vu beaucoup de tableaux remplis avec des carrés, ou bien des 1 jusqu'à $\sqrt{N}$ et 0 ensuite.

Partie V Très rares tentatives pour cette partie.

Conclusions

Le peu d'intérêt que suscite la production d'algorithmes est décevant.

L'algèbre linéaire était abordée de façon très élémentaire par cet énoncé. On ne relève pas de lacune particulière dans cette partie du programme, si ce n'est la maladresse à former des raisonnements succincts et complets.