ÉCOLE POLYTECHNIQUE — CONCOURS D'ADMISSION 2014
ENS : LYON, CACHAN, RENNES

Composition de Mathématiques A, Filière MP
(XLCR)

Rapport de MM. Alexandre BORITCHEV, Maxime BOURRIGAN, Grégory GINOT et Olivier MARCHAL, correcteurs.

Introduction

Le sujet portait sur l'étude des formes quadratiques dans le cas d'un corps de caractéristique nulle mais non nécessairement égal à $\mathbb{R}$. Ce dernier aspect a semblé poser beaucoup de problèmes à de nombreux candidats qui ont utilisé des résultats uniquement valables dans le cas du corps des nombres réels. D'une façon générale, le sujet s'est avéré relativement long pour la plupart des candidats et la troisième partie n'a été que peu traitée par les candidats. Par ailleurs, le jury remarque que la qualité et la précision de certains raisonnements ou arguments n'était pas forcément à la hauteur des attentes, y compris parfois pour de brillants candidats. En particulier à de trop nombreuses reprises nous avons constaté l'utilisation abusive de formules prêtes à l'emploi comme « il est évident que », « on a forcément », etc. pour cacher l'impossibilité d'achever un raisonnement. Le jury a cherché à récompenser les candidats qui ont pris le temps de répondre à des questions difficiles par rapport à ceux qui se sont livrés au « grappillage ».

La répartition des notes des candidats français est la suivante :

$0 \leq \mathrm{N} < 4$	156	10,30 %
$4 \leq \mathrm{N} < 8$	551	36,37 %
$8 \leq \mathrm{N} < 12$	504	33,27 %
$12 \leq \mathrm{N} < 16$	289	13,24 %
$16 \leq \mathrm{N} \leq 20$	56	3,70 %
Total	1515	100 %
Nombre de copies : 1515		
Note moyenne : 8,57		
Écart-type : 3,81		

Préliminaires sur les formes quadratiques

Cette première partie avait pour but de vérifier l'assimilation des définitions et des notations proposées par le sujet et d'établir quelques premiers résultats importants pour

Téléchargé gratuitement sur Doc-Solus.fr

la suite. D'une façon générale, nous insistons sur l'importance de ne pas négliger la rédaction de ces questions mais de ne pas non plus y passer un temps considérable qui est préjudiciable pour la suite.

Question 1 : La vérification n'a guère posé de problèmes sauf pour quelques rares candidats qui ont oublié de vérifier l'une des conditions.

Question 2 : Définir l'application

$$\begin{array}{cccc} \Phi & : & q(V) & \to & \mathrm{Sym}(V) \\ & & q & \mapsto & \tilde{q} \end{array}$$

n'a en général pas posé de problèmes, mais en revanche le caractère bijectif a été souvent mal traité, certains candidats invoquant des arguments de dimension (injectif implique bijectif) incorrects.

Question 3a : Il s'agit de la première question dans laquelle on a pu observer une première sélection tant au niveau de la qualité de la réponse que de la longueur de celle-ci. Beaucoup de candidats ont choisi l'option de se lancer dans l'écriture développée du déterminant et se sont perdus par la suite. Ici la suite d'équivalences :

$$\begin{array}{rcl} \det \Phi_B(\tilde{q}) = 0 & \Leftrightarrow & \exists u \neq 0 / u \in \ker \Phi_B(\tilde{q}) \\ & \Leftrightarrow & \exists u \neq 0 / \Phi_B(u) = 0 \Leftrightarrow \exists u \neq 0 / \forall w \in V \, : \, {}^t w \Phi_B(\tilde{q}) u = 0 \\ & \Leftrightarrow & \tilde{q} \text{ est dégénérée} \end{array}$$

était le moyen le plus rapide d'aboutir.

Question 3b : Cette question n'a pas posé de problèmes. La quasi-totalité des candidats est parvenue à aboutir à la conclusion que $\prod_{i=1}^{n} a_i \neq 0$. Quelques erreurs ont été observées pour conclure que cela était équivalent à ce que $a_i \neq 0$ pour tout i.

Question 4a : Cette question nécessitait d'être soigneux lors de la rédaction. Trop de candidats ont omis d'écrire les quantificateurs dans leur rédaction alors que ces derniers jouaient un rôle important dans cette question. Ainsi si par l'absurde on aboutit à

$$\exists v' \in V' \, / \, \forall w' \in V' \, : \, q'(v' + w', v' + w') - q'(v', v') - q(w', w') = 0 \, .$$

En notant alors v et w dans V tels que $v' = f(v)$ et $w' = f(w)$ où f est l'isométrie passant de q à q', on obtient alors (grâce à la linéarité de f) que $q(v + w) - q(v) - q(w) = 0$. En revanche pour terminer le raisonnement, il faut impérativement mentionner que ce résultat est valable quelque soit $w \in V$ puisque f est bijective.

Question 4b : Il s'agissait ici presque d'une question de cours. Montrer que $\{x\}^\perp$ est un sous espace vectoriel est trivial. Par ailleurs, la forme étant non dégénérée, cela implique qu'il existe au moins un vecteur y tel que $\tilde{q}(x, y) \neq 0$. Ainsi on a $\dim\{x\}^\perp \leq n - 1$. En revanche la dernière étape a souvent posé de grandes difficultés. Ici l'argument le plus simple était de dire que $\{x\}^\perp$ était le noyau d'une forme linéaire non nulle pour obtenir le résultat.

Téléchargé gratuitement sur Doc-Solus.fr

Question 4c : Il est facile de montrer que $\mathbb{K}x$ est un supplémentaire de $\{x\}^{\perp}$ si et seulement si $q(x) \neq 0$. Cette question n'a en général pas posé de problème.

Question 5 : Il s'agissait de la seconde question pour laquelle une sélection nette entre les candidats a eu lieu. L'application a considérer était :

$$\begin{array}{rccc} \Psi & : & \mathcal{O}(q) & \rightarrow & \mathcal{O}(q') \\ & & f & \mapsto & F \circ f \circ F^{-1} \end{array}$$

où F est l'isométrie reliant q à q'. Pour les candidats qui sont parvenus à définir correctement cette application (ou une autre équivalente), vérifier que Ψ est bien définie, qu'il est linéaire, que $\Psi(\mathrm{Id}) = \mathrm{Id}$ ainsi que $\Psi(f \circ g) = \Psi(f) \circ \Psi(g)$ et $\Psi(f^{-1}) = \Psi(f)^{-1}$ (action par conjugaison) n'a pas posé de problème. Le morphisme inverse était donné par :

$$\begin{array}{rccc} \Phi & : & \mathcal{O}(q') & \rightarrow & \mathcal{O}(q) \\ & & f' & \mapsto & F^{-1} \circ f' \circ F \end{array}$$

Le jury constate également que même si l'application a été trouvée correctement, certaines propriétés de l'isomorphisme de groupes ont été trop souvent oubliées, en particulier $\Psi(\mathrm{Id}) = \mathrm{Id}$.

Partie 1 : Existence de bases orthogonales

Cette partie traitait du résultat classique de l'existence de bases orthonormées pour les formes quadratiques. Il est à rappeler que dans cette section le corps de référence est général et que les résultats concernant spécifiquement $\mathbb{R}$ ne pouvaient donc pas être utilisés ici.

Question 6a : Aucune difficulté pour les candidats avec un raisonnement par l'absurde immédiat.

Question 6b : Cette question difficile n'a quasiment jamais été traitée de façon satisfaisante. Le jury a par conséquent fortement récompensé les candidats qui ont pris le temps et le soin de rédiger cette question. Une idée de démonstration était de prendre une base adaptée de V. Par exemple la base B $\{x, z\}$ où $q(x) = 0$ et $\tilde{q}(x, z) \neq 0$ en justifiant leur existence. On peut alors définir astucieusement ou par tâtonnements :

$$f \; : \; \alpha x + \beta z \;\; \mapsto \;\; {}^{t}(2\alpha\tilde{q}(x, z) + \beta q(z), \beta)$$

qui vérifie $q(\alpha x+\beta z) = \beta\,(2\alpha\tilde{q}(x, z) + \beta q(z)) = (h\circ f)(\alpha x+\beta z)$. Il reste alors à démontrer que f est bijective pour terminer le raisonnement.

Question 6c : Il s'agissait ici de définir une application affine non constante qui est donc surjective dans $\mathbb{K}$. L'application linéaire de la question précédente vue comme fonction de α convenait parfaitement.

Téléchargé gratuitement sur Doc-Solus.fr

Question 7a : Cette question nécessitait également une rédaction propre est clairement énoncée. Le jury déplore que beaucoup trop de candidats n'ont pas pris le temps d'écrire un raisonnement par récurrence sur la dimension de façon claire alors que celui-ci ne posait pas de difficultés particulières compte tenu des résultats obtenus auparavant. Enfin une part non négligeable des candidats a invoqué la diagonalisation d'une application symétrique sur une base orthogonale qui n'a pas lieu sur un corps quelconque mais uniquement dans $\mathbb{R}$.

Question 7b : En se plaçant sur la base orthogonale précédente la question ne posait pas de difficultés. Il fallait néanmoins préciser pourquoi les a_i ne pouvaient pas être nuls et définir clairement l'isomorphisme.

Partie 2 : Étude quand $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

Bien qu'ayant été mis en difficulté sur la partie précédente, certains candidats ont pu dans cette partie se reprendre et utiliser les résultats du cours.

Question 8 : En partant du résultat de la question 7.b et en classant les a_i suivant leur signe et en renormalisant correctement, on aboutit facilement au résultat demandé. En revanche il est important de préciser ce que ces opérations impliquent au niveau de l'isomorphisme ce qui a malheureusement été négligé par les candidats.

Question 9 : Le résultat était ici que $\det M = \pm 1$ et a été deviné par beaucoup de candidats. En revanche sa justification a posé davantage de problèmes. On pouvait invoquer ici la suite d'équivalences suivante :

$$\begin{array}{l}
\exists f \in Gl(\mathbb{R}^n) /\, Q_{r,s} \circ f = Q_{r,s} \\
\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}^n : {}^t(Mx) I_{r,s} (Mx) = {}^t I_{r,s} x \ (M = j(f)) \\
\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}^n : {}^t x ({}^t M I_{r,s} M - I_{r,s}) x = 0 \\
\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}^n : \left\langle x, ({}^t M I_{r,s} M - I_{r,s}) x \right\rangle \\
\Leftrightarrow {}^t M I_{r,s} M - I_{r,s} = 0
\end{array}$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ désigne le produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^n$ qui est non dégénéré (d'où la dernière équivalence). On conclut de la dernière égalité que $\det M = \pm 1$. Il était également nécessaire de préciser pourquoi les deux valeurs $+1$ et -1 sont effectivement atteintes.

Question 10 : Il s'agissait ici d'une question de cours. Montrer que $\mathcal{O}_{r,s}$ est un sous groupe n'a pas été de soi pour certains candidats qui ont oublié certaines propriétés sur l'inverse par exemple. Pour le caractère fermé on pouvait invoquer que l'application :

$$\begin{array}{cccc}
\psi & : & \mathrm{GL}(\mathbb{R}^n) & \to & \mathrm{GL}(\mathbb{R}^n) \\
 & & M & \mapsto & {}^t M I_{r,s} M
\end{array}$$

est bien définie et continue et que l'image réciproque d'un fermé par une application continue est un fermé.

Téléchargé gratuitement sur Doc-Solus.fr

Question 11 : La première partie de la question était assez simple en utilisant l'argument qu'un fermé dans un compact est un compact. Ensuite on pouvait considérer l'application

$$\begin{array}{rcccc} \psi & : & \mathcal{O}(r) \times \mathcal{O}(s) & \to & K_{r,s} \\ & & (U_r, U_s) & \mapsto & A = \begin{pmatrix} U_r & 0 \\ 0 & -U_s \end{pmatrix} \end{array}$$

dont l'inverse est

$$\begin{array}{rcccc} \phi & : & K_{r,s} & \to & \mathcal{O}(r) \times \mathcal{O}(s) \\ & & M = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix} & \mapsto & (A, D) \end{array}$$

Question 12 : Malheureusement pour beaucoup de candidats, l'image réciproque par une application continue d'un ensemble connexe par arcs n'est pas connexe par arcs. Il fallait ici décrire explicitement le chemin reliant deux éléments de $\mathcal{O}_2$ ou alors utiliser d'autres arguments.

Question 13a : Cette question n'a pas posé beaucoup de difficultés aux candidats. Le plus simple était de raisonner par double inclusion.

Question 13b : Il s'agissait d'une question relativement facile qui a été bien traitée. Le caractère de sous-groupe est immédiat. Par ailleurs $\mathcal{O}_{2,1}$ est un fermé de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ (question 10) et $\mathcal{SO}_{2,1} = \det^{-1}(\{1\})$ dans $\mathcal{O}_{2,1}$. C'est donc l'image réciproque d'un fermé par une application continue donc c'est un fermé de $\mathcal{O}_{2,1}$.

Question 14a : Les calculs sont triviaux sur des matrices 3×3. Néanmoins il fallait penser à vérifier tous les points suivants :
- ${}^tMI_{2,1}M = I_{2,1}$
- $\det M = 1$
- $z_f = \mathrm{ch}(t) > 0$ par définition de la fonction ch.

En particulier le dernier point a souvent été oublié.

Question 14b : Nous rappelons ici qu'une rotation ρ_θ d'axe $(0, 0, 1)$ peut s'écrire dans la base canonique :

$$\rho_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Il est alors facile de vérifier que le déterminant de $r_t \circ \rho_\theta \circ f$ vaut bien 1 par le produit des déterminants. Par ailleurs notons que $\rho_\theta{}^t\, I_{2,1}\rho_\theta = I_{2,1}$ car l'axe de la rotation est $(0, 0, 1)$. On en déduit ainsi par composition que $r_t \circ \rho_\theta \circ f$ reste bien dans $\mathcal{O}_{2,1}$ (puisque c'est un sous-groupe et que les 3 éléments en font partie). Il reste à choisir θ et t convenablement pour que $r_t \circ \rho_\theta \circ f(0, 0, 1) = (0, 0, 1)$. Après un petit peu de calculs on trouve que :

$$z_f = \mathrm{ch}\ t\ ,\ \cos\theta = \frac{y_f}{\mathrm{sh}\ t}\ ,\ \sin\theta = \frac{x_f}{\mathrm{sh}\ t}\ .$$

Question 14c : Le piège de cette question était le même que la question 12. Pourtant

Téléchargé gratuitement sur Doc-Solus.fr

décrire explicitement le chemin nécessaire n'était pas compliqué avec le résultat de la question précédente.

Question 15 : La terminologie de cette question a visiblement fait fuir bon nombre de candidats. Pourtant il suffisait de classer les éléments de $\mathcal{O}_{2,1}$ suivant leur déterminant (qui vaut ± 1) et le signe de z_f (strictement positif ou strictement négatif). Une fois cela compris, l'écriture propre ne posait pas de problèmes particuliers.

Question 16 : Il s'agit d'une réécriture du résultat de la question précédente en considérant le morphisme

$$\begin{array}{rccc} \psi & : & \mathcal{O}_{2,1} & \to & \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}} \times \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}} \\ & & M & \mapsto & \left(\frac{1-\det M}{2}, \frac{1-\frac{z_f}{|z_f|}}{2}\right) \end{array}$$

qui à un élément de $\mathcal{O}_{2,1}$ renvoit son déterminant et son signe correctement normalisé pour obtenir 0 ou 1. Notons que l'on a bien $\psi(\mathrm{Id}) = (1,1)$ qui est l'élément neutre de $\frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}} \times \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}$.

Partie 3 : Somme orthogonale

Cette partie visait à la démonstration des *théorèmes de Witt* (1937), points de départ de l'étude algébrique des formes quadratiques dans un corps de caractéristique nulle quelconque.

D'une façon générale elle a été peu traitée même si certains candidats ont essayé de grapiller quelques points sur certaines questions faciles.

Question 17a : Les vérifications se font facilement pour le caractère quadratique et bilinéaire. Seul le caractère non dégénéré est moins évident. Soit $(v, v') \in V \times V' \setminus \{(0,0)\}$ alors on sait qu'il existe $u \in V$ et $u' \in V'$ tels que $\tilde{q}(u, v) \neq 0$ ou $\tilde{q}(u', v') \neq 0$. Considérons alors :

$$q\tilde{\perp}q'((v, v'), (u, 0)) = \tilde{q}(u, v) + \tilde{q}(v', 0) = \tilde{q}(u, v) \neq 0$$

où $q\tilde{\perp}q'((v, v'), (0, u')) \neq 0$ donc (v, v') n'est pas orthogonal à tous les vecteurs et comme cela est valable quelque soit v et v' on obtient que $q \perp q'$ n'est pas dégénérée. L'isomorphisme canonique :

$$\begin{array}{rccc} \psi & : & (V \times V') \times V'' & \to & V \times (V' \times V'') \\ & & ((x, y), z) & \mapsto & (x, (y, z)) \end{array}$$

convient de façon triviale pour établir la fin de la question.

Question 17b : Soit $f : V' \to V''$ l'isométrie vérifiant $q'' \circ f = q'$. On définit alors :

$$\begin{array}{rccc} F & : & V \times V' & \to & V \times V'' \\ & & (u, v) & \mapsto & (u, f(v))\ . \end{array}$$

Téléchargé gratuitement sur Doc-Solus.fr

Comme f est un isomorphisme linéaire, il est trivial que F est également linéaire et bijectif. On vérifie aisément que :

$$(q\perp q'') \circ F(u,v') = q(u) + q''(f(v')) = (q\perp q')(u,v')\ .$$

Question 17c : Soit $V = V' + V''$ avec $\tilde{q}(x,y) = 0$ pour tous les éléments $x \in V'$ et $y \in V''$. Soit $x \in V$ alors il existe deux uniques éléments $y \in V'$ et $z \in V''$ tels que $x = y + z$. Notons $i_{V'}$ la projection qui à x associe y et $i_{V''}$ la projection qui à x associe z. Il est clair que ces deux applications sont des applications linéaires surjectives. Notons alors :

$$\begin{array}{rcccc} f & : & V & \to & V' \times V'' \\ & & x & \mapsto & (i_{V'}(x), i_{V''}(x)) \end{array}$$

l'isomorphisme canonique. On montre alors que $(q'\perp q'') \circ f(x) = q'(i_{V'}(x)) + q''(i_{V''}(x))$ nous donne bien $q(x)$ puisque :

$$\begin{array}{rcl} 0 & = & \tilde{q}(y, i_{V''}(x)) = \dfrac{1}{2}\left(q(x) - q(i_{V'}(x)) - q(i_{V''}(x))\right) \\ & \Rightarrow & q(x) = q(i_{V'}(x)) + q(i_{V''}(x)) = q'(i_{V'}(x)) + q''(i_{V''}(x)) \end{array}$$

Ainsi $(q'\perp q'') = q$ ce qui prouve le résultat.

Question 18a : Cette question était relativement facile et a été beaucoup traitée. Il fallait commencer par montrer que s_x est injectif et donc un endomorphisme de V. Ensuite on montre que $q = q \circ s_x$. En effet, un simple calcul utilisant la bilinéarité de $\tilde{q}$ montre que :

$$\begin{array}{rcl} q \circ s_x(y) & = & q\left(y - \dfrac{2\tilde{q}(x,y)x}{q(x)}\right) = 4\dfrac{\tilde{q}(x,y)}{q(x)}\tilde{q}(y,x) + q(y) - 4\dfrac{\tilde{q}(x,y)^2}{q(x)^2}q(x) \\ & = & q(y) \end{array}$$

donc $s_x \in \mathcal{O}(q)$. La vérification pour $-s_x$ se fait de la même façon ou en observant que $-s_x(y) = s_x(-y)$ et en utilisant $q(-y) = q(y)$.

Question 18b : A nouveau cette question ne présentait pas trop de difficulté et a été bien traitée dans l'ensemble. En prenant $x = w - v$ dans la question précédente on obtient que s_{w-v} est une isométrie. On vérifie alors que $\tilde{q}(v,w) = q(v) - \frac{1}{2}q(w-v)$ en utilisant le fait que $q(v) = q(w)$ dans la définition de $q(w-v)$. On a alors :

$$s_{w-v}(v) = v - 2\frac{\tilde{q}(w,v)}{q(w-v)}(w-v) + 2\frac{q(v)}{q(w-v)}(w-v) = w$$

en remplaçant $\tilde{q}(v,w)$ dans l'expression centrale.

A l'exception d'une poignée d'étudiants, les dernières questions au niveau de difficulté élevé n'ont pas été abordées par les candidats. Néanmoins le jury note que quelques candidats ont réussi à traiter le sujet dans son ensemble de façon quasiment exacte et cela malgré le temps restreint qu'il leur était proposé.

Téléchargé gratuitement sur Doc-Solus.fr