1.2 D - MATHEMATIQUES II - filière MP

I) REMARQUES GENERALES

Le problème de cette année proposait, dans le prolongement du théorème de Picard, la démonstration de quelques résultats d'existence et d'unicité du point fixe d'une fonction et leur application à des équations intégrales de Fredholm. Ce sujet s'est avéré, de longueur et de difficulté, adapté au niveau moyen des candidats. Il a permis un bon étalement des notes et en particulier, d'évaluer tant la connaissance du cours que la maîtrise de la logique mathématique et la capacité à comprendre les objectifs d'un problème donné.

S'il nous a été donné de lire d'excellentes copies dont les auteurs ont fait preuve d'une grande maîtrise de la discipline, nous avons pu également constater, dans un grand nombre d'entre elles, plusieurs défauts, dont les principaux sont les suivants :

- une attention insuffisante aux hypothèses de la question et aux conditions d'applicabilité d'un théorème,
- un défaut de maîtrise des quantificateurs ($\exists$, $\forall$),
- une propension à inventer des théorèmes certes pratiques mais hélas faux.

Ce sont ces défauts qui sont à l'origine de la plupart des erreurs commises dans les copies, comme nous allons le détailler à présent.

II) REMARQUES PARTICULIERES

Question 1. L'unicité du point fixe a été souvent imparfaitement traitée : défaut de valeur absolue, inégalité large et non stricte, erreur de logique ont été fréquents. En particulier, les candidats se donnaient souvent deux points fixes sans préciser qu'ils étaient distincts. Ils concluaient à une absurdité et non à leur égalité.

Question 2. De nombreux candidats ont majoré $x_{n+p} - x_n$ par une quantité dépendant de p, ce qui ne suffisait pas à établir que la suite (x_n) est de Cauchy. D'autres ont fait intervenir la somme des termes d'une suite géométrique, mais les erreurs dans la valeur de cette somme ont été fréquentes. Les plus astucieux ont majoré $\| x_{n+1} - x_n \|$ par le terme général d'une série géométrique, ce qui leur a permis d'en déduire la convergence normale de la série de terme général $x_{n+1} - x_n$, donc la convergence de la suite (x_n) d'où résulte son caractère de Cauchy.

Question 3. Pour conclure, il restait à établir trois points : la convergence de la suite (x_n), le fait que sa limite appartient à A et le fait qu'elle est un point fixe de f. De nombreux candidats n'ont établi qu'un ou deux de ces trois points, et certains n'ont pas compris qu'il s'agissait, dans cette question, d'achever la démonstration du théorème de Picard.

Question 4. La simple lecture de l'énoncé permettait de répondre immédiatement que 0 appartient à T du fait que f admet un point fixe.

Question 5. L'existence de la suite (x_n) résultait de la définition même de T. Quant à l'inégalité demandée, elle s'obtenait en introduisant un point intermédiaire, soit (x_n , t_m) soit (x_m , t_n).

Question 6. Comme dans un espace de Banach, une suite est convergente si et seulement si elle est de Cauchy. Le fait que (t_n) soit convergente implique que (x_n) est de Cauchy donc elle-même convergente. Pour en déduire que T est fermée, il fallait prouver que sa limite est solution de l'équation $x = h(x, t)$ pour une certaine valeur de t, celle-ci étant évidemment la limite de la suite (t_n). C'est là que de nombreux candidats ont inventé un premier théorème : une fonction séparément continue par rapport à chacune de ses deux variables est continue par rapport à ses deux variables, qui est faux comme le montre l'exemple de la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$, $f(0, 0) = 0$. Par contre, ce résultat est vrai quand on remplace le mot « continue » par « lipschitzienne », ce qu'une partie des candidats ont heureusement vu et utilisé de manière pertinente.

Une autre erreur résidait dans la définition d'une suite de Cauchy en raison d'une interversion de quantificateurs. Pour certains candidats, (u_n) est une suite de Cauchy si pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $p \in \mathbb{N}$ il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$ on a $| x_{n+p} - x_n | \leq \varepsilon$. Autrement dit, N dépendrait de ε et de p et non seulement de ε. Une telle définition ne convient évidemment pas, comme le montre l'exemple de la suite (u_n) définie par $u_n = \sqrt{n}$.

Question 7. L'argument principal de cette question était le fait que x appartient à l'intérieur de A, ou ce qui revient au même, que ∂A est un fermé. De nombreux candidats ont considéré une suite qui converge vers x et sont passés à la limite en conservant le caractère strict des inégalités, ce qui est évidemment faux.

Question 8. Si la preuve de cette inégalité est voisine de celle de la question 5, elle ne lui est pas pour autant équivalente et il convenait de la réécrire.

Question 9. Un point essentiel du théorème de Picard, à savoir la stabilité de A par f, a été omis par de nombreux candidats qui ont considéré f en tant qu'application définie sur A. En fait, une majorité ne s'est même pas préoccupée de préciser l'ensemble de départ de f, et peu d'entre eux ont compris que l'intérêt de la question 8 était d'établir la stabilité de la boule fermée de centre x et de rayon r par f, ce qui permettait de la prendre comme ensemble de départ pour l'application du théorème de Picard.

Question 10. Un certain nombre de candidats ont écrit directement, ce qui est tout à fait correct, qu'une partie non vide ouverte et fermée d'un ensemble connexe est égale à cet ensemble. Ceux qui ont suivi la suggestion de l'énoncé et considéré la borne supérieure de A ont le plus souvent utilisé correctement cette notion.

Question 11. Une minorité de candidats a vu qu'il suffisait d'appliquer le résultat de la question 10. Un grand nombre d'entre eux a une nouvelle fois appliqué le théorème de Picard sans prêter attention au fait que A n'est pas supposé stable par f.

Question 12. Il s'agissait d'effectuer une majoration relativement élémentaire de l'intégrale définissant $F(\varphi)(t)$. Cependant cette question a donné lieu à de nombreuses erreurs. Celles-ci sont par ordre croissant de gravité : oubli de la valeur absolue, mauvais positionnement du sup, intégrale de la norme majorée ensuite par la norme de l'intégrale, prise du sup par rapport à la variable d'intégration, confusion entre les variables t et x. Un minimum de précautions permettait d'obtenir tous les points à cette question, ce qui n'a pas été le cas le plus fréquent.

Question 13. Une nouvelle fois, un certain nombre de candidats ont invoqué le théorème de Picard pour répondre à cette question. Cela reposait sur le théorème suivant : l'image d'un fermé borné par une application continue est un fermé borné, qui est faux en dimension infinie.

Question 14. Pour prouver que X est fermé, le plus simple était de se donner une suite convergente (x_n) d'éléments de X et de prouver que sa limite appartient encore à X. Par définition, à chaque x_n on pouvait associer $t_n \in [0, 1]$ tel que $x_n = t_n\, f(x_n)$. L'erreur la plus fréquente a été de choisir le même t pour tous les x_n , ce qui simplifiait certes grandement le raisonnement. Si elle n'a pas été commise, les candidats ont souvent déduit de la convergence des suites (x_n) et $(f(x_n))$ celle de la suite (t_n), sans se préoccuper du fait que $f(x_n)$ pouvait tendre vers 0 et qu'il fallait donner un argument supplémentaire pour justifier cette convergence.

Certains candidats ont cru pouvoir utiliser le théorème suivant : l'image réciproque d'un fermé par une application continue est un fermé, en considérant l'application λ_t qui à x associe $x - t\, f(x)$. Mais X est ici non l'image réciproque de $\{0\}$ par cette application, mais la réunion des images réciproques de 0 par toutes les applications λ_t , or la réunion d'une infinité de fermés n'est pas nécessairement un fermé.

L'argument essentiel pour terminer cette question était que les distances d'un élément x de A à X et à ∂A ne peuvent s'annuler simultanément, ce qui provient du fait que ces deux ensembles sont fermés. Quant à la fonction distance à une partie, elle est définie et 1-lipschitzienne quelle que soit la partie en question dès l'instant qu'elle est non vide, qu'elle soit ou non fermée puisque cette fonction est définie comme borne inférieure d'un ensemble de réels positifs ou nuls.

Question 15. Le problème de la continuité de g se posait surtout sur la frontière de A, où un minimum d'explications en sus de la simple annulation de g sur cette frontière était apprécié. La compacité de l'adhérence de g a souvent été fort mal traitée : il est faux de dire que $g(A)$ est égal à $[0, 1] \times f(A)$, et plus encore que son adhérence est compacte car fermée bornée. Certains candidats ont utilisé de manière pertinente une double extraction à partir d'une suite $(t_n\, f(x_n))$ de $g(A)$; d'autres, de manière plus pertinente encore, ont relevé que $g(A)$ est une partie fermée du compact $[0, 1] \times \mathrm{adh}(f(A))$ et de ce fait est compacte.

Question 16. Une bonne partie des candidats ont exposé correctement l'enchaînement des raisonnements requis pour résoudre cette question. Le point le plus fréquemment oublié était l'appartenance du point fixe de f à l'intérieur de A.

Question 17. La démonstration de cette question requérait l'emploi de l'inégalité de Cauchy-Schwarz. Le fait que φ est définie et continue sur le segment $[0, 1]$ permettait d'utiliser dans c_φ la norme du sup et non la norme L^2. Par contre on ne pouvait employer la norme L^1 qui ne domine pas cette dernière.

Question 18. Il suffisait d'établir la continuité de $F(\varphi)$ sur $[0, 1]$ en utilisant la deuxième inégalité de la question 17, ce qu'ont vu un certain nombre de candidats. Par contre montrer que $F(\varphi)$ est bornée sur $[0, 1]$ n'apportait rien de plus dans cette question.

Question 19. Le procédé le plus naturel consistait à utiliser un théorème d'intégration d'une suite de fonctions. Il s'avère qu'un nombre conséquent de candidats n'ont pas idée de l'existence d'une condition de domination.

Question 20. Il ne suffisait pas ici d'établir la continuité uniforme des fonctions $F(\varphi_n)$ puisque le module de continuité ε devait être ici indépendant non seulement de t et de u, mais également de n. Il était donc nécessaire de reprendre la deuxième inégalité établie à la question 17 en remarquant que l'on pouvait majorer les constantes c_{φ_n} indépendamment de n.

Question 21. Malgré l'indication donnée, peu de candidats ont compris l'esprit de cette question. Il fallait établir non que la limite de la suite $(F(\varphi_n))$ est dans E, mais que la convergence a lieu pour la norme définie sur E, autrement dit que cette suite converge uniformément. La continuité de F résultait alors de sa caractérisation séquentielle.

Question 22. Certains candidats ont pensé à prendre une partie dense *dénombrable* de [0, 1], comme par exemple la suite des rationnels, et assez bien décrit la succession infinie d'extractions de la suite (φ_n) qui permettait d'aboutir au résultat demandé.

Question 23. Il s'agissait de faire la synthèse des résultats obtenus dans les questions précédentes pour en déduire l'existence d'un point fixe intérieur à la boule de centre O et de rayon M de E. Peu de candidats ayant abordé cette question l'ont réalisée complètement.

C'était la dernière année qu'un sujet de ce type était possible, en raison de la disparition du programme de MP de plusieurs notions de topologie comme les suites de Cauchy.
C'est un choix sans doute inévitable en raison de l'évolution des programmes du collège et du lycée et de l'introduction des probabilités qui nécessite de libérer du temps d'enseignement. Il ne sert à rien de regretter ce choix, le futur programme constitue encore une base suffisante pour permettre aux professeurs de susciter chez leurs étudiants une authentique démarche mathématique.

Nul doute que les problèmes qui seront proposés à l'avenir aux candidats seront conçus de façon à valoriser la capacité à mener une telle démarche sur des notions nouvelles.