

**Composition de Mathématiques, Filière PC  
(XEULC)**

**Rapport de MM. Stéphane ATTAL, Frédéric BERTRAND et Paul LAURAIN, correcteurs.**

Les notes des candidats se répartissent selon les données du tableau suivant :

$0 \leq N < 4$	146	10,51 %
$4 \leq N < 8$	612	44,06 %
$8 \leq N < 12$	459	33,05 %
$12 \leq N < 16$	137	9,86 %
$16 \leq N \leq 20$	35	2,52 %
Total	1389	100 %
Nombre de copies : 1389		
Note moyenne : 8,04		
Écart-type : 3,46		

## Commentaires généraux

Il s'agissait d'un sujet qui ne demandait pas forcément de connaissances très élaborées, mais qui était parfois technique et calculatoire. Il y avait des calculs un peu longs mais importants à ne pas manquer, sous peine d'être gêné par la suite. C'est peu de dire que c'est un sujet qui n'a pas plu aux candidats. Les résultats ont été très moyens.

Un point important et général à soulever : lorsque que l'on aboutit après un calcul long et fastidieux d'au moins une page à un résultat, il n'y a aucune raison de croire dur comme fer qu'il soit exact et enchaîner par la suite avec ce résultat pour acquis, même si on voit des contradictions avec des résultats suivants. Il faut absolument que les candidats soient mieux entraînés à vérifier leurs calculs. Il existe beaucoup de moyens pour cela. Bien sûr, refaire le calcul pour vérifier ne coute pas très cher en temps et peut sauver beaucoup de points. Mais aussi on peut prendre du recul sur le résultat, vérifier une cohérence, faire une vérification numérique sur un exemple. On peut mettre son résultat en perspective avec les questions qui suivent. Bref, il existe de nombreux moyens et nous pouvons assurer aux candidats que les mathématiciens passent beaucoup de temps à vérifier eux aussi, leurs calculs. Il serait bien qu'un effort soit fait par les candidats et leurs professeurs pour mettre l'accent sur ce point.

Concernant la présentation des copies, nous avons observé une « explosion » du nombre de copies très mal écrites, voire illisibles, raturées sur des pages entières, sans rédaction, sans phrase, uniquement avec des symboles mathématiques. On se moque du correcteur.

On le répète chaque année, la copie sert à rendre un résultat propre, abouti, réfléchi et rédigé. Ce n'est pas une feuille de brouillon. Nous en avons tenu compte dans la notation cette année, mais face à l'augmentation du nombre de copies de ce genre, nous en tiendrons compte de manière importante pour les prochains concours.

Un manque de précision dans la rédaction et l'absence de quantificateurs aux passages cruciaux des démonstrations sont également à déplorer.

Concernant la stratégie : c'est en faisant avec soin les questions un peu difficiles, celles qui demandent un peu de travail, de réflexion ou de calcul, que l'on gagne réellement des points, pas en survolant toutes les questions et en répondant à toutes celles qui sont faciles. On peut dire sans exagérer qu'environ 75% des candidats font le même lot de questions, avec plus ou moins de bonheur. Les candidats qui font vraiment la différence sont ceux qui font deux ou trois questions plus difficiles, plus longues, où il y a un raisonnement en 2 ou 3 étapes à faire. Ce sont des différences de 5 points que l'on peut alors voir facilement.

Passons maintenant au détail, question par question.

## I. Préliminaire

Ce préliminaire entièrement traité pouvait rapporter 3,4 points.

- 1) La plupart des candidats ont bien reconnu une rotation.
- 2) Beaucoup de candidats se limitent au cas  $n = 3$ , ou à un cas particulier, et affirment l'identité en dimension quelconque sans autre forme de justification.
- 3) La notion de matrices semblables est souvent confondue avec celle de matrices équivalentes.
- 4) Pas de remarque particulière concernant cette question.
- 5) Cette question élémentaire n'est pas souvent bien traitée. Il y avait de très nombreuses méthodes pour y arriver, dont une étude systématique de la fonction en fonction de la position relative de  $x$  par rapport à  $a, b, c$  et  $d$ . Les erreurs les plus fréquentes sont celles où le candidat fait dire n'importe quoi à l'inégalité triangulaire.

## II. Conjugaison par matrice de rotation

Cette longue partie II entièrement traitée pouvait rapporter 15,6 points.

- 6) Correctement traitée par la plupart des candidats.
- 7) Un certain nombre de candidats donne l'expression générale des  $s'_{ij}$  en fonction des  $s_{ij}$  à l'aide de la formule de multiplication des matrices. Bien sûr il s'agit d'une réponse

incomplète, il fallait être plus précis en séparant les cas en fonction des valeurs relatives de  $i$  et  $j$  par rapport à  $p$  et  $q$ .

**8 a)** Cette question a été bien traitée lorsque la précédente l'avait été avec précision.

**8 b)** Il est surprenant de constater que plus de la moitié des candidats n'ont pas le réflexe d'utiliser les relations coefficients/racines. On a vu une très grande majorité des candidats s'embarquer dans des calculs compliqués avec des expressions longues comme le bras, sur lesquelles ils essayent de faire des inégalités. Alors qu'il suffisait de dire que le produit des racines valait  $-1$ .

**8 c)** Question rarement traitée alors qu'il suffisait de combiner 7) et 8 a). Un nombre non négligeable de candidats ont grappillé, en remarquant simplement qu'on peut déduire  $s'_{qq} - s_{qq}$  de  $s'_{pp} - s_{pp}$  à l'aide 8 a).

**8 d)** Seule une poignée de candidats s'est penchée sur cette question qui n'est rien d'autre qu'une application quasi-directe de 7).

**8 e)** Comme la précédente, cette question a été rarement traitée. Il fallait simplement remarquer que  $\|S\|^2 = \|D\|^2 + \|E\|^2$ , utiliser le fait que  $\|S\| = \|S'\|$  d'après 4) et la question précédente.

**9)** Résultats catastrophiques pour cette question. La plupart des candidat ayant essayé de traiter cette question ont simplement exprimé les coefficients de  $S'$  en fonction de ceux de  $S$  sans se soucier des coefficients trigonométriques. Alors que le but de la question était justement de faire remarquer au candidat que l'on peut exprimer  $\cos$  et  $\sin$  en fonction de  $\tan$ .

**10 a)** Cette question demandait d'utiliser la formule obtenue en 8 d) et de remarquer que  $\|S\|^2 \leq n(n-1)s_{pq}^2$ . Beaucoup de candidats ne saisissent pas le sens du mot "constante" puisque leur  $\rho$  dépend des coefficients de  $S$ .

**10 b)** Cette question a été traitée par presque aucun candidat. Pourtant une fois que l'on remarque que  $\|D' - D\|^2 = (s'_{pp} - s_{pp})^2 + (s'_{qq} - s_{qq})^2$  il suffit d'appliquer la 8 c).

**11)** Il s'agit ici d'une des questions la plus difficile de l'énoncé. Il fallait penser à calculer  $s_{qq} - s'_{pp} - s'_{qq} + s_{pp}$  et  $s'_{qq} - s'_{pp} + s_{qq} - s_{pp}$  à l'aide des questions précédentes puis appliquer une identité remarquable.

**12 a)** À l'aide de 8 a), c) on démontre la formule suivante

$$s_{pp} - s'_{pp} = s'_{qq} - s_{qq} = s_{pq} \frac{s_{qq} - s_{pp}}{1 - t_0^2}.$$

Sans oublier que  $t_0 \in ]-1, 1[$ , la réponse est une conséquence de la formule.

12 b) Il s'agit d'une simple application de la question précédente et de la question 5).

13) Cette question a été traitée par moins de 1% des candidats.

### III. Algorithme de Jacobi incomplet

Cette partie III entièrement traitée pouvait rapporter 2,1 points.

On aborde une partie quasiment oubliée par la plupart des candidats et où le peu de candidats qui ont tenté des justifications ont proposé des démonstrations assez fantaisistes.

14 a) D'après 13) on a  $2\varepsilon_n \leq R_{n+1} - R_n$ , pour montrer que la série converge il suffit de montrer que  $R_n$  est borné, pour cela il suffit de montrer que  $\Sigma_n$  est borné ce qui est clair d'après 4).

15) On applique la question précédente et le critère de convergence des suites télescopiques. C'est sur la convergence que l'on a observé le plus de critères incroyables dans les copies (sans même parler des habituels "la suite tend vers 0 donc sa somme converge").

### IV. Convergence et polynôme caractéristique

Cette partie IV entièrement traitée pouvait rapporter 2,5 points.

16) Récurrence immédiate. Ce qui ne doit pas empêcher les candidats de la rédiger en détail.

17) Il est important ici de bien justifier la continuité des coefficients du polynôme caractéristique par rapport aux coefficients du polynôme. C'est ce qui a le plus manqué pour une question qui pouvait rapporter beaucoup.

18) Une application immédiate du cours qui pourtant a dérouté bon nombre de candidats sur les précisions à apporter quant à la multiplicité des valeurs propres.

### V. Algorithme de Jacobi ; version optimale

Cette partie V entièrement traitée pouvait rapporter 3 points.

*Il s'agit d'exemples, qui ne constituent en aucun cas une extension du programme.*

19) On sait déjà que la diagonale converge d'après 15). Or la norme de la partie sans diagonale est contrôlée par  $\rho^n \|E^{(0)}\|$  d'après 10 a).

20) Il suffit de remarquer que la question 18) s'applique vu que les  $\Sigma^{(m)}$  sont semblables.

21-22) Nous ne détaillerons pas ici la façon dont les candidats (moins de 1%) ont répondu à ces questions le plus souvent pour grappiller des demi-points, ou pour écrire des choses fantaisistes.