1/ Présentation du sujet

Le problème proposait dans un premier temps deux exercices, le premier demandait de calculer des sommes de séries en utilisant les séries de Fourier et ses théorèmes de convergence. Le second exercice cherchait une solution d'un système différentiel au moyen des exponentielles de matrices. Dans un second temps, un problème étudiait les liens entre développement en série entière et série de Taylor à l'aide d'exemples et contre-exemples. Il permettait aux candidats d'utiliser les outils fondamentaux de l'analyse et plusieurs notions : fonctions de classe C^∞, séries entières, convergence uniforme, intégrales sur un intervalle quelconque….

Cette épreuve diversifiée a favorisé les candidats qui connaissaient bien leur cours (ce qui demande un travail approfondi qui n'est pas toujours effectué). L'énoncé abordait des questions assez classiques et les étudiants étaient guidés, ce qui leur a permis de faire la démonstration de leur savoir-faire, de leur rigueur et leur précision dans les réponses. Il s'agissait d'une épreuve tout à fait abordable, qui nécessitait une pratique solide de l'analyse, mettant en jeu des techniques fondamentales et variées : raisonnements graphiques, recherches d'exemples et de contre-exemples, techniques de majorations, calculs, relations logiques, etc.

L'observation première de la part des correcteurs est le manque de rigueur. On utilise des théorèmes sans vérifier toutes les hypothèses, ou sans préciser quel théorème est utilisé. Ensuite, on constate beaucoup d'erreurs de calcul, de raisonnement, de majorations fausses ou encore un manque d'esprit critique en particulier lorsque le candidat trouve des résultats peu cohérents. Les candidats ne prennent pas assez de recul sur le problème, ils doivent penser à utiliser les questions qui précèdent et aussi éviter de répondre aux questions dans un ordre aléatoire. Enfin, certains lisent trop vite la question posée et ainsi ne répondent pas à ce qui est attendu.

Le premier exercice sur les séries de Fourier n'a pas connu le succès attendu, les théorèmes de convergences n'étant pas maitrisés. Le deuxième exercice est assez bien réussi, ceux qui ne connaissaient pas la méthode utilisant e^{tA} ont pu par d'autres stratégies trouver la solution particulière. Pour le problème, les étudiants ont dans l'ensemble cerné l'esprit du texte et ont pu passer en revue toutes les questions. Toutefois, la convergence normale n'est pas maitrisée et les étudiants se montrent peu à l'aise dans les majorations d'un point de vue technique ou d'un point de vue « non uniforme en x ».

En résumé, c'est un sujet qui aura rempli son contrat en permettant de sélectionner les candidats avec un grand écart-type. Les étudiants moyens et sérieux auront pu honorablement tirer leur épingle du jeu. Une grande majorité a réussi à traiter le sujet en entier.

La moyenne de l'épreuve est de 11,26 et l'écart type est de 4,05.

L'attention des candidats est attirée sur le fait que les textes des sujets de mathématiques nécessitent une connaissance très précise des points fondamentaux du cours.

Sont ainsi valorisés :

- L'apprentissage du cours et en particulier les démonstrations des points importants, les exercices et exemples de base.
- Les qualités de rigueur et de clarté d'exposition que l'on peut attendre d'un futur ingénieur.
- L'aptitude à savoir manipuler sa calculatrice.
- Le soin apporté à la présentation de son travail. En particulier, les résultats doivent être mis en évidence (encadrés ou <u>soulignés</u>).

Un candidat de niveau moyen et qui a travaillé doit pouvoir obtenir au moins la moyenne.

2/ Remarques détaillées par question

Premier exercice

Cet exercice a été mal réussi.
La principale erreur est de confondre série de Fourier et somme de la série de Fourier.

De trop nombreuses copies utilisent ainsi, dès la première question, $\sum_{n=0}^{\infty}$ sans avoir cité le théorème de convergence de Dirichlet. On constate aussi de faux coefficients de Fourier (par exemple, $b_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx$.

On notera que le candidat a le droit d'utiliser sa calculatrice pour les obtenir.
Une copie sur 10 environ donne une représentation graphique fausse.

Pour trop de candidats, les quotients $\frac{1}{(2k+1)^2}$ et $\frac{1}{k^2}$ sont équivalents à l'infini !

Enfin, les théorèmes de convergence (Dirichlet ou Parseval) ne sont pas toujours bien connus.

Deuxième exercice

La première question est bien réussie. Toutefois, on attendait l'expression explicite de la matrice e^{tA}.

Pour la deuxième question, trop de candidats ont fait l'impasse sur la formule $t \mapsto e^{tA}X_0$ afin de trouver une solution particulière. Ils pouvaient cependant, dans ce cas précis, trouver la solution sans passer par la matrice e^{tA}.

Problème

1. Quelques erreurs dans la dérivée de la fonction $x \mapsto \frac{1}{1-x}$.

On notera que l'on peut dériver terme à terme une série entière de rayon 1 sur l'intervalle $]-1,1[$ sans justification (et surtout ne pas dire que cette série converge uniformément sur l'intervalle $]-1,1[$).

2. Questions assez bien réussie.
Toutefois, on rencontre les erreurs :
$\Gamma(n) = n!$ ou encore $\Gamma(x+1) = x!$ pour un réel x.

3. Question qui favorise le candidat ayant appris son cours.
Récurrences parfois longues ou non initialisées.
Quelques erreurs de signe (qui arrivent au bon résultat avec un peu de mauvaise foi !).

4. Question mal traitée en général.
Peu de candidats utilisent le rappel. D'autres écrivent le développement en série entière de la fonction $x \mapsto \dfrac{\sin x}{x}$ sans se soucier du cas $x = 0$.

5. Trop de réponses sous forme de séries.
On attendait ici que le candidat utilise la question 1 et trouve : $f(x) = \dfrac{x}{(1-x)^2}$.
Certaines réponses (exemple : $f(x) = nx^n$) dépendent de n !!!

6. La convergence normale est rarement bien faite. On oublie souvent la valeur absolue dans la majoration.
Par ailleurs, cette convergence normale doit servir : en particulier pour intervertir $\sum$ et $\int$ …
Pour le passage de $\int_0^1 (f(x))^2 dx = 0$ à $f^2 = 0$, on attend DEUX mots : continue et positive.

7. Question rarement traitée alors qu'il y a beaucoup de réponses simples possibles.

8. **a)** Le graphe est souvent faux. Il devait mettre en évidence que la fonction ne s'annule qu'en 0 et non que la fonction est « plate » au voisinage de 0.
b) Trop d'erreurs pour trouver le lien entre P_{n+1} et P_n, par exemple, on rencontre que la dérivée de la fonction $x \mapsto P_n(\dfrac{1}{x^2})$ est $x \mapsto P_n'(\dfrac{1}{x^2})$ ou encore que $x \mapsto \dfrac{1}{x} P_n(x)$ est une fonction polynôme…
c) Il convenait ici d'utiliser le théorème de prolongement de classe C^1 réitéré.
d) Assez souvent bien fait.

9. **a)** Pour justifier que la fonction est intégrable on rencontre trop d'erreurs.
Le théorème de Leibniz (ou dérivation sous le signe intégral) est rarement bien utilisé : outre les majorations fausses, il y a trop de dominations qui dépendent de *x.*
b) La question a été rarement réussie.

10. Cette question facile est souvent bien traitée.