Mathématiques 2

Présentation du sujet

On considère l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire canonique et on assimile les vecteurs de $\mathbb{R}^n$ à l'espace des matrices colonnes d'ordre $n \in \mathbb{N}^*$ et, de même, l'espace des matrices carrées, réelles, d'ordre $n \in \mathbb{N}^*$ à l'espace des endomorphismes de $\mathbb{R}^n$. On s'intéresse au sous-espace des matrices symétriques et on note, pour une telle matrice A :

$$R(A) = \left\{ {}^tXAX \;\middle|\; X \in \mathbb{R}^n, \|X\| = 1 \right\}$$

La partie **I** permet de montrer qu'une condition nécessaire et suffisante pour que la trace $\mathrm{Tr}(A)$ appartienne à $R(A)$ est qu'il existe une matrice orthogonale Q telle que la diagonale de ${}^tQAQ$ s'écrive $(\mathrm{Tr}(A), 0, 0, \cdots, 0)$. Dans le **II**, on se restreint à l'ordre 2. On propose une relation d'ordre sur l'espace de ces matrices et on en étudie les propriétés, montrant que toute suite croissante majorée est convergente. Enfin, dans la section **III**, on revient à l'ordre n et on montre, par récurrence, une inégalité de convexité sur le déterminant d'une somme pondérée de matrices.

Analyse globale des résultats

Le sujet comporte des parties « faciles », au début, qui permettent d'entrer dans la problématique. Il est d'accès abordable par la majorité des candidats et bien gradué. Les très bons candidats font preuve, tout à la fois de maitrise du cours dans son ensemble et de compréhension des enjeux ; certains ont « dominé » le sujet, mais aucun n'est parvenu à le traiter dans son ensemble. Les candidats qui n'ont « rien compris » au problème sont très rares et manifestaient simultanément une méconnaissance totale du cours de mathématiques.

Commentaires sur les réponses apportées et conseils aux candidats

Dans la première partie, on fait appel de manière immédiate au cours de mathématiques. On peut déplorer des imprécisions, voire des inexactitudes dans la formulation d'un sujet simple. Au **I.A** on trouve très souvent : « Soit λ une valeur propre et X *le* vecteur propre associé … »

On trouve aussi (plus rarement, heureusement) : « Soit λ une valeur propre, alors, *pour tout* X, on a $AX = \lambda X$, … ».

Les candidats font appel aux « réflexes conditionnés » bien plus qu'à leur intelligence et la presque totalité affirme au **I.C.3** : « f est continue sur un segment, donc elle est bornée et atteint ses bornes, … » ; ou bien : « f est continue sur un compact, donc son image est un compact, … ». Ici seule la connexité importe et les bornes ou la compacité n'ont aucun rapport avec la question !

La question **I.E** appelle une remarque. Pour prouver l'égalité de deux ensembles, il est souvent plus prudent de montrer la double inclusion qui conduit à un raisonnement limpide et exact. Le raisonnement par équivalence conduit en général à des erreurs (et à la perte des points correspondants). Dans le cas présent, les candidats qui ont voulu procéder ainsi ont été, en général, amenés à affirmer : « $\|X\| = 1 \Longleftrightarrow \|QX\| = 1$ ». Cela ne permet pas de déduire directement que Q est une bijection de la sphère unité (ce serait possible mais moyennant un raisonnement additionnel qui n'a jamais été fait).

La question **I.G** n'a été correctement résolue que par de très rares candidats. La plupart se laisse guider par l'écriture sans démonstration. Ceux qui ont utilisé les valeurs propres ont souvent affirmé : « $S - S'$ a des valeurs propres nulles ; elle est alors semblable à $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; donc elle est nulle ». Il fallait exploiter le fait que la matrice était symétrique, car une matrice dont les valeurs propres sont nulles n'a aucune raison d'être nulle !

La seconde partie utilisait le « théorème spectral » qui, comme les années précédentes, est très mal connu des candidats. On ne trouve presque jamais le bon énoncé : « Si A est symétrique réelle, elle est diagonalisable sur une base orthonormée », « Si A est symétrique réelle, il existe une matrice orthogonale U telle que UA^tU soit diagonale ». On trouve souvent : « Si A est symétrique réelle, elle est diagonalisable sur *sa* base de vecteurs propres ».

Ensuite se pose le problème de trouver une matrice de changement de bases conduisant à une base orthonormée. Deux stratégies connaissent alors un certain succès :

– affirmation, *a posteriori*, que toute base (ou bien la base) de vecteurs propres est orthonormée ;

– on voit aussi souvent : « si A est symétrique réelle, elle est diagonalisable sur la base orthonormée formée de ses vecteurs propre ».

Terminons par quelques conseils de bon sens mais qu'il n'est pas inutile de rappeler :

– attention à l'orthographe, très souvent lamentable, qui peut changer le sens d'une assertion. On peut se demander quelle sera la crédibilité, voire la compréhensibilité des rapports de ces futurs ingénieurs ;

– numéroter les pages ou les feuilles et écrire le numéro de la question traitée. Par exemple II.D.2) ; un a, tout seul, en haut d'une nouvelle feuille non numérotée, oblige le correcteur à faire une enquête minutieuse et fastidieuse (qui lui permet parfois d'aboutir à la conclusion qu'il s'agit de III.C.2) ;

– le théorème spectral est un élément de la théorie spectrale mais on n'écrit pas « théorème spectrale ».

Conclusions

Le jury pense que ce sujet, bien gradué et qui faisait appel tout à la fois, à l'algèbre linéaire, bilinéaire et un peu à la géométrie, a bien rempli son rôle. L'étalement des notes est particulièrement important et les copies obtiennent des notes qui sont bien en correspondance avec les qualités manifestées. Le problème permettait aux meilleurs candidats, qui manifestent compréhension et connaissances, de se distinguer et d'exprimer leur potentiel.