Rapport sur l'épreuve de Mathématiques 1, concours PSI

Dans cette épreuve, on se proposait d'étudier une équation différentielle
(E) $X'(t) = A(t)X(t) + B(t)$ pour t appartenant à un intervalle I de $\mathbb{R}$.

Dans la partie I, on étudiait un exemple dans lequel la matrice A était à coefficients constants.

Pour aborder le cas général d'une matrice $A(t)$ dont les coefficients sont des fonctions continues sur l'intervalle I, on définissait, dans la partie II, la matrice résolvante de l'équation homogène (E_0) $X'(t) = A(t)X(t)$ et l'on montrait comment cette résolvante permettait de trouver une solution particulière de l'équation (E).

Les résultats, purement théoriques, ainsi obtenus allaient être appliqués dans la partie III à la résolution d'une équation du second ordre.

L'épreuve permettait de tester les connaissances des candidats, aussi bien en algèbre linéaire (matrice et application linéaire, matrice inverse, éléments propres) qu'en analyse (équations différentielles de toutes sortes, séries entières, intégrales à paramètre). Le sujet proposé a été révélateur aussi bien de l'aisance technique des candidats que de leur niveau d'assimilation de diverses notions importantes d'algèbre et d'analyse. Les trois parties pouvaient être abordées et elles l'ont été très largement.

Partie I

Dans cette partie, on faisait déterminer les éléments propres de la matrice A pour en déduire un système fondamental de solutions et la solution générale complexe de l'équation (E_0). On souhaitait ensuite obtenir les solutions réelles de l'équation (E) ainsi qu'une solution particulière.

Il est surprenant que certains candidats ne sachent pas calculer le polynôme caractéristique et que ces mêmes candidats trouvent des sous-espaces propres réduits à $\{0\}$ sans que cela n'attire de remarque. La définition de système fondamental de solutions a semblé souvent méconnue (alors que l'énoncé redonnait cette définition). Beaucoup d'étudiants ne font pas la distinction entre "système fondamental de solutions" et "solution générale".

En I.2.2, la recherche de la solution générale réelle de l'équation (E), qui conduisait à une succession d'équations différentielles scalaires à coefficients constants, n'a que très rarement abouti. Il y a souvent des incohérences dans le nombre de constantes et trouver la solution générale réelle d'une équation différentielle du type $y'' + y = e^t(at + b)$ est pour beaucoup insurmontable.

Partie II

Cette partie, purement théorique, était consacrée à la notion de matrice résolvante. Après avoir défini cette matrice, plusieurs questions permettaient de comprendre que l'utilisation de la résolvante fournissait une généralisation de la méthode de "variation des constantes" pour une équation différentielle linéaire scalaire du premier ordre.

Les candidats qui ont bien compris les objets manipulés, ont plutôt bien traité cette partie, pour les autres beaucoup de confusion lorsque la matrice résolvante est traitée comme un vecteur, ou bien lorsqu'un candidat écrit
$\left(W(t_0)\right)^{-1} = \left(X_1(t_0), \ldots, X_n(t_0)\right)^{-1} = \left(X_1^{-1}(t_0), \ldots, X_n^{-1}(t_0)\right)$.
Enfin, la dérivation de $\displaystyle\int_{t_0}^{t} R(t,u)B(u)du$ dans la question II.4.3 n'a que très rarement été effectuée correctement.

Partie III

Dans cette partie, on appliquait les résultats obtenus dans la partie II pour résoudre une équation différentielle scalaire du second ordre (e).
Le sujet guidait les candidats pour trouver deux solutions indépendantes de l'équation homogène (e_0), puis pour la "fabrication" de la matrice résolvante et enfin pour la résolution de l'équation différentielle matricielle associée à (e).

Les correcteurs ont noté le peu de lucidité d'un nombre important de candidats face à la question III.1.1. La recherche du degré d'un polynôme solution de (e_0) conduit à une suite de calculs longs et inachevés.
Concernant la notion de série entière, qui faisait l'objet de la question III.1.3, il faut noter que si le calcul de la relation de récurrence sur les a_n est assez bien fait, pour la majorité des candidats la suite de ces questions a permis de constater un manque de rigueur évident : absence de valeurs absolues pour la règle de d'Alembert, division d'un quotient par $k-3$ sans se soucier de la nullité, et par suite ne pas trouver k_0, dériver une série entière sans dire pourquoi on le peut ni sur quel intervalle.

Concernant la question III.2, la surprise est grande de voir l'extrême difficulté pour certains de trouver l'inverse d'une matrice 2×2 (dont on ne dit pas toujours pour quelle raison elle est inversible).

Les questions III.3 sont abordées par quelques candidats et il faut féliciter les meilleurs qui arrivent à obtenir quelques résultats en III.3.3.

Nous avons apprécié les efforts de nombreux candidats pour rendre leur copie plus lisible. Nous souhaiterions un peu plus de rigueur et un peu de réflexion, ce qui permettrait à de nombreux candidats de mieux exploiter leurs connaissances.