Composition de Mathématiques B, Filière MP
(X)

Rapport de MM. Hakim BOUMAZA, Samuel TAPIE et François VIGNERON, correcteurs.

Cette épreuve a dégagé très nettement deux grands types de candidats. Un gros tiers des notes se situent dans une gaussienne étroite centrée autour de 3,8/20. Les candidats correspondant à ces copies sont passés complètement à côté du sujet proposé. Pour le reste des candidats, les copies se répartissent sur une gaussienne large, centrée autour de 11,5/20, ce qui en fait une épreuve plutôt réussie pour ces derniers.

La moyenne générale est 7,6/20 et 22 candidats ont obtenu la note 20. Les notes se répartissent selon le tableau suivant :

$0 \leq \mathrm{N} < 4$	413	26,4 %
$4 \leq \mathrm{N} < 8$	416	26,6 %
$8 \leq \mathrm{N} < 12$	426	27,2 %
$12 \leq \mathrm{N} < 16$	233	14,9 %
$16 \leq \mathrm{N} \leq 20$	76	4,9 %
Total	1564	100 %
Nombre de copies : 1564		
Note moyenne : 7,89		
Écart-type : 4,55		

Commentaires généraux

Comme observé précédemment, une partie des candidats est passée sévèrement à côté du sujet. De façon générale, ce sujet demandait de reproduire presque à l'identique des démonstrations de résultats de cours. En revanche, il n'était quasiment jamais possible de répondre sous la forme « D'après le Théorème ***, on a... ». Ainsi, les candidats qui connaissaient superficiellement les énoncés de cours sans en connaître les démonstrations ont été rapidement éliminés.

On rappelle, comme chaque année, que toute tentative de « grapillage » à la recherche des quelques questions les plus faciles sans chercher à comprendre l'essentiel du sujet aboutit à une note désastreuse. Le sujet était long, il était donc préférable de traiter correctement une partie des questions plutôt que d'essayer d'en survoler toutes les parties sans vraie démonstration. Les candidats ayant justifié correctement la première moitié des questions peuvent rédiger de façon plus minimale la fin de l'épreuve. Mais il va de soi qu'une réponse à moitié rédigée dans une copie par ailleurs cousue de bêtises est sanctionnée.

Certains candidats affirme que si une série entière diverge en z_0, alors ses sommes partielles divergent vers $+\infty$ en z_0. Cela entraînait un contre-sens important sur la première et la troisième partie du problème, qui traitaient du comportement d'une série entière sur son cercle de convergence. Dans la première partie, utiliser un Théorème de Cesaro vague (et non démontré) pour rédiger de façon elliptique les questions 1 à 4 aboutissait également à un échec. Nombre de candidats ont confondu « C-convergence de la série Σu_n » et « C-Convergence de la suite u_n », ce qui aboutissait à des hors-sujets sur les questions 4, 5 et 13.

Traiter complètement la première partie, en particulier les exemples de la question 5, était long. Les candidats qui s'y sont attelés ont été récompensés, à la fois par le barême, et par la compréhension que cela leur apportait pour la suite du problème. De même, les questions délicates 7b, 8a et 8b ont souvent fait la différence entre des copies moyennes et de bonnes copies.

La seconde partie traitait de l'espace vectoriel $\mathcal{E}$ de dimension *infinie* engendré par les $\{t \mapsto e^{i\lambda t}; \lambda \in \mathbb{R}\}$. Nous attirons l'attention des candidats sur le fait que les espaces de fonctions interviennent très fréquemment sur les épreuves de Mathématiques de la filière MP. Ils doivent donc être entraînés aux spécificités de la dimension infinie. En particulier, un vecteur de $\mathcal{E}$ est une combinaison linéaire *finie* de vecteurs générateurs, une forme linéaire n'est pas automatiquement continue...

Un nombre importants de candidats présentent encore des calculs qui n'aboutissent pas, ou qui présentent un « trou » stratégiquement placé au milieu du calcul. Ils concluent alors leur argumentation par un « donc » injustifié qui leur permet d'aboutir au résultat demandé. On rappelle que ce genre de tentatives pour « arnaquer » le correcteur n'aboutit qu'à l'agacer et à le rendre plus sévère sur le reste de la correction. Nous invitons donc les candidats à utiliser un brouillon et à ne pas recopier des pages de calculs inutiles sur leur copie. À moins que les candidats concernés ne perçoivent pas la faute de logique de leur argumentation, ce qui est encore plus grave.

Par ailleurs, de nombreux candidats n'apportent aucun soin à leur copie et ne mettent pas en avant dans la rédaction de leurs réponses les arguments clés de la démonstration. Ce manque de soin dans la présentation et dans la rédaction ne peut qu'amener le correcteur à être moins clément avec ces candidats.

Examen détaillé des questions

Première partie

Question 1 Il s'agissait d'une question de cours sur le Théorème de Cesaro, traitée correctement par 80% des candidats. Attention aux hypothèses dans l'utilisation des sommation des relations de comparaisons (séries à termes positifs versus séries complexes), attention également à ne pas prendre d'équivalent à 0. Utiliser la question 3 comme contre-exemple à la réciproque du Théorème de Cesaro n'était crédible que pour les candidats ayant réussi la-dîte question 3.

Question 2 La question a été correctement traitée par 75% des candidats, mais a été le lieu de beaucoup de grosses bêtises. Attention aux manipulations erronées sous la valeur absolue, $|a| \leq |b|$ n'entraîne pas $|a-2| \leq |b-2|$. Ne pas prendre de sommes d'équivalents. Une suite qui ne converge pas vers 0 ne tend pas nécessairement vers une limite non-nulle.

Question 3 Question majoritairement ratée. La méthode la plus simple consistait sans doute à s'inspirer de la preuve de la convergence des séries alternées, en montrant par récurrence que $|\sum_{k=0}^{n} a_k| \leq a^n$ et que $\sum_{k=0}^{n} a_k$ est du signe de $(-1)^n$. Il n'était bien sûr pas possible d'invoquer directement le critère de convergence des séries alternées, puisque le terme général a_n ne tend pas vers 0. On pouvait également utiliser la C-convergence de $a_n + a_{n+1}$, ou de façon plus originale une transformation d'Abel avec la série $\Sigma(-1)^n$.

Question 4 Seuls 10% des candidats réussissent cette question. Il fallait soit reproduire dans ce contexte la démonstration du Lemme d'Abel, soit appliquer la question 2 plusieurs fois pour aboutir à $c_n z_0^n/n \to 0$. Une partie des candidats a confondu (sciemment ou non) $\frac{1}{n}\sum_k a_k$ avec $\sum_k \frac{a_k}{k}$.

Question 5 Question très peu traîtée. Beaucoup de candidats se sont contentés de justifier le rayon de convergence des séries de façon plus ou moins correcte, sans chercher à déterminer F et $\sigma(z)$ pour $z \in F$. La question 5.a était élémentaire dès que les notations de l'énoncé étaient comprises. Les questions 5.b et 5.c étaient longues, donc valorisées par le barême.

Deuxième partie

Question 6 a Cette question révèle toute les incertitudes des candidats qui mélangent les critères d'intégrabilité sur un segment et sur un intervalle non borné, la limite de l'intégrand ou de l'intégrale en $+\infty$, des automatismes de « majoration uniforme implique convergence de l'intégrale »... En se rappelant qu'un élément de l'espace $\mathcal{E}$ est une combinaison linéaire *finie* des $t \mapsto e^{i\lambda t}$, le calcul direct de la limite était élémentaire, et donnait la réponse à la seconde moitié de la question 6.b. La linéarité de M était élémentaire, en revanche la continuité demandait une justification. Ceux qui ont voulu écrire les éléments de $\mathcal{E}$ comme des séries infinies d'exponentielle se sont perdus dans des justifications douteuses et inutiles des inversions série-intégrale.

Question 6 b Une petite moitié des candidats réussit cette question. Là encore, oublier que $\mathcal{E}$ est l'ensemble des combinaisons linéaires finies d'exponentielles conduisait à un hors-sujet. Le système proposé était générateur par définition. Trois méthodes ont été principalement utilisées pour justifier (correctement) sa liberté. On part d'une relation linéaire entre des éléments et on utilise sa dérivée pour éliminer une inconnue. Un argument de récurrence permet alors de conclure. On peut également voir les e_λ comme les vecteurs propres de l'opérateur linéaire de dérivation, sans oublier de justifier que la dérivation est un endomorphisme de $\mathcal{E}$. Enfin, on pouvait partir de n dérivées successives d'une relation linéaire de longueur n, et utiliser l'inversibilité de la matrice de Van Der Monde pour conclure. De façon plus originale et rarement vue, on pouvait montrer que $(f,g) \mapsto M(f\bar{g})$ définissait un produit scalaire sur $\mathcal{E}$, pour lequel les (e_λ) sont orthogonaux.

Beaucoup de bêtises ont été énoncées dans cette question. L'orthogonalité dans $L^2([0,2\pi])$ des $e^{i\lambda t}$ n'est pas vraie pour $\lambda \notin \mathbb{Z}$. La fonction $t \mapsto e^{i\lambda t}$ n'est pas 2π-périodique en général. La limite en $+\infty$ de $e^{-i\lambda t}$ n'est certainement pas 0 pour $\lambda \in \mathbb{R}$. De même, en aucun point « bien choisi » $e^{i\lambda t}$ ne s'annule. Dire qu'il suffit d'évaluer en suffisamment de points pour obtenir un système inversible est vrai... à condition de savoir faire le calcul !

Question 7a Question élémentaire de manipulation de somme, réussie par 85% des candidats. Une erreur sur les formules d'Euler à ce niveau est inadmissible.

Question 7b Le début de la question, élémentaire série télescopique, a été traité correctement par 60% des candidats. La seconde partie en revanche n'a été réussie que par 25% d'entre eux. Beaucoup de calculs faux ou non-aboutis ont été présentés comme démonstration de cette deuxième égalité... Parmi les copies qui ont correctement traité cette question, la méthode principalement utilisée était de développer le carré, et de remarquer qu'après le changement d'indice $k \to N-k$, la partie réelle du résultat est $(N+1)\sum_{j<k}\cos(k-j)t$. On pouvait alors utiliser le 7a pour conclure. On pouvait aussi remarquer que $(1-\cos(\alpha t))/(1-\cos t) = (\sin(\alpha t/2)/\sin(t/2))^2$ puis utiliser 7a. D'autres méthodes étaient possibles...

Question 8a et 8b Ces questions, délicates et importantes, ont été très peu traitées correctement (15% des candidats). Trois arguments devaient clairement apparaître (et à bon escient) : la stabilité de l'espace $\mathcal{E}$ par produit, la distributivité du produit sur la somme qui justifie les éléments dans la combinaison linéaire finale, et enfin la liberté sur $\mathbb{Q}$. Les candidats qui réussissent cette question ont, en grande majorité, developpé explicitement le produit. Ceux qui maîtrisaient les notations en multi-indices (hors-programme) étaient clairement avantagés. Parmi ceux qui ont tenté d'argumenter sans faire le calcul, très peu ont compris la distributivité du produit sur la somme. Une erreur commune à de nombreux candidats ayant tenté de faire le calcul a été d'intervertir directement les symboles somme et produit sans en changer les indices.

Question 8c L'énoncé invitait à utiliser la question 6c. Il ne fallait pas oublier de mentionner qu'elle s'applique ici car, d'après 7b, les K_N sont des fonctions *positives*. Certains candidats manipulent encore le passage à la limite dans les inégalités avec maladresse.

Question 9 La question était indépendante du reste du problème. La minoration, réussie par la plupart des candidats étant arrivés jusque là, découle directement de l'inégalité triangulaire. La majoration (le plus souvent râtée) s'en déduit grâce l'identité, pour u et v de module 1, $|u-v|^2 = 4-|u+v|^2$. Un argument de géométrie plane pouvait également suffire.

Question 10a Application directe de 8c et de la définition de la norme $\|.\|_\infty$.

Question 10b Il n'était pas possible d'utiliser le cas d'égalité de l'inégalité triangulaire pour la limite, sans démontrer *au préalable* que cette limite était atteinte. Comme le suggérait l'énoncé, appliquer la question 9 donnait une preuve directe de la limite demandée.

Question 10c De très nombreuses copies argumentent ainsi : « Comme $e^{2i\pi y_m} \to 1$, par continuité de l'exponentielle y_m converge vers un nombre entier, donc 0 puisque $y_m \in [-1/2, 1/2[$ », ce qui est faux. Nous invitons les candidats à réflechir à l'exemple suivant :

$$y_n = n \bmod[5] + \frac{(-1)^n}{n}$$

est bornée, $\lim e^{2i\pi y_n} = 1$, mais (y_n) n'a pas de limite.

Il fallait faire apparaître le mot « bijection », ou utiliser une fonction trigonométrique réciproque. On pouvait également utiliser un argument de valeur d'adhérence (hors-programme). Le logarithme sur les complexes (hors-programme) ne devrait *jamais* être utilisé sans précaution.

Question 11a Les candidats qui sont arrivés jusque là (une minorité) ont généralement su traiter cette question. En supposant que le sup est atteint sur un compact, il est atteint en un point. On se trouve donc dans le cas d'égalité de l'inégalité triangulaire, ce qui contredit l'indépendance sur $\mathbb{Q}$ des λ_j.

Question 11b Il ne suffit pas de sortir de tout compact pour avoir une limite $\pm\infty$, il faut en général extraire une sous-suite (par exemple $u_n = (-1)^n n$).

Question 12 La formulation courte de la question a conduit beaucoup de candidats à une rédaction minimaliste et fausse. D'après la question 11, $2N'_m \to +\infty$ (quitte à considérer $-N'_m$). De plus, d'après 10c, $e^{i\lambda_j N_m}$ converge vers $e^{-i\alpha_j}$ recherché. Pour toute extractrice ϕ, l'exponentielle de $W_m = N_m + 2N'_{\phi(m)}$ converge donc vers le résultat demandé. Il suffit alors d'ajuster l'extractrice pour que $W_m \to +\infty$, par exemple en prenant

$$\phi(m) = \inf\{k > \phi(m-1); N_{m+1} + 2N'_k > 1 + W_m\}.$$

Troisième partie

Très peu de candidats on traité cette partie. C'était pourtant l'aboutissement du sujet, qui aurait pu motiver plus de candidats. Il était possible de la traiter sans avoir su faire la partie 2, à condition d'avoir bien compris le Théorème de Kronecker. Essentiellement, deux types de copies l'ont essayé : des candidats faibles qui tentent de grapiller des points, et de bons candidats ayant traité le reste du problème. Les premiers arrivent généralement à répondre à la première partie de la question 13a, à condition d'avoir compris les notations F et $\sigma(z)$ de la première partie. Ils traitent rarement le reste de cette partie. Quelques copies, excellentes, ont traité cette partie en ne mettant que les arguments essentiels au sein d'un raisonnement correct. Elles ont été naturellement valorisées.