Composition de Mathématiques A, Filière MP
(XLC)

Rapport de MM. Jérôme FEHRENBACH, Pierre-Vincent KOSELEFF, Patrick LEMEUR et Paul-Émile PARADAN, correcteurs.

L'épreuve portait sur l'étude des valeurs singulières d'une matrice et des inégalités de traces. Elle ne comportait pas de questions particulièrement difficiles mais souvent un peu délicates à traiter correctement. De nombreux candidats ont semblé gênés par le produit scalaire hermitien usuel (qui n'était pas défini explicitement dans l'énoncé) ce qui a conduit souvent à des lourdeurs de rédaction, en particulier dans les premières questions. Un certain nombre de candidats n'ont pas fait la différence entre structure hermitienne et structure euclidienne.

Les notes des candidats se répartissent selon les données du tableau suivant :

$0 \leq N < 4$	213	11,58 %
$4 \leq N < 8$	565	30,71 %
$8 \leq N < 12$	581	31,58 %
$12 \leq N < 16$	331	17,99 %
$16 \leq N \leq 20$	150	8,15 %
Total	1840	100 %
Nombre de copies : 1840		
Note moyenne : 9,12		
Écart-type : 4,41		

Comme les années précédentes (en ce qui concerne l'épreuve de Maths 2 de l'École Polytechnique), nous ne pouvons que constater en général une certaine désinvolture dans la rédaction, voire une absence de rédaction. Il manque très souvent des quantificateurs dans les expressions mathématiques et les fins des démonstrations sont souvent négligées. En général, une majorité de candidats ne prend pas la peine de justifier, ne fût-ce qu'en deux mots, soit un passage d'une ligne de calcul à la suivante, soit une affirmation qui découle d'une question précédente ou d'une hypothèse de l'énoncé, sans s'y référer explicitement.

Ceci peut expliquer des notes moyennes pour des candidats qui ont traité un grand nombre de questions mais dont les démonstrations étaient incomplètes.

Examen détaillé des questions

1. En fin de compte, un nombre assez faible de candidats donnent une réponse satisfaisante, négligeant de définir proprement le produit scalaire, ou utilisant l'existence d'un opérateur adjoint alors que l'énoncé évoque des matrices.

2a. De trop nombreux candidats négligent d'utiliser des quantificateurs, ce qui conduit à des démonstrations incorrectes.

2b. Beaucoup de candidats n'ont pas su démontrer proprement cette question, affirmant directement le résultat.

3a. De nombreux candidats ont utilisé (sans le démontrer) que $\mathrm{Im}A^* = (\mathrm{kerA})^\perp$, ce qui n'est pas au programme. Quelques-uns l'ont démontré. On pouvait s'en passer pour démontrer la première partie de la question. Notons que le passage du noyau à l'espace propre a été souvent mal traité, de trop nombreux candidats ayant oublié que la structure était hermitienne.

3b. De nombreux candidats ont tenté une démonstration par récurrence souvent bancale. La récurrence simple $n \to n+1$ n'est pas adaptée ici.

4. Cette question, somme toute assez facile a été très souvent mal traitée : une suite d'égalités et de formules sommatoires plus ou moins justifiées conduisant miraculeusement au résultat annoncé.

5a. Une réponse simple consistait à remarquer que $\|Ax\|^2 = \|A^*wx\|^2$ ce qui conduisait au résultat. La plupart des candidats ont tenté d'autres démonstrations assez peu convaincantes.

5b. La rédaction de la récurrence a été souvent calamiteuse. Le niveau du concours demande de rédiger soigneusement la rédaction par récurrence.

6a. La plupart des candidats ont remarqué qu'il convenait de trouver un polynôme P tel que $P(\lambda_i) = \overline{\lambda_i}$, mais peu ont expliqué comment s'y prendre, surtout lorsque les valeurs propres n'étaient pas distinctes.

6b. La plupart des candidats ont su utiliser la question précédente pour démontrer ce point.

7. Peu de candidats ont réussi à montrer l'implication $(i) \Rightarrow (ii)$. Il fallait notamment traiter correctement le cas des valeurs propres nulles.

8. Assez peu de candidats ont su utiliser la partie I pour traiter cette question et certains ont invoqué le cours ou l'ont redémontré *ex nihilo*. Il est à noter que le programme couvre les matrices symétriques réelles, et que le sujet traite le cas des matrices hermitiennes.

9. Très peu de candidats ont su traiter cette question, en particulier l'unicité.

10. Cette question se traite sans difficulté, dès lors que l'on remarque que l'ensemble des matrices unitaires est stable par produit. De nombreux candidats l'on fait correctement.

11. Très peu de candidats ont correctement traité cette question en particulier l'unicité.

12a. De nombreux candidats ont traité cette question partiellement en commettant de nombreuses erreurs.

12b. Très peu de candidats ont réussi à justifier l'inégalité. En revanche, nombreux sont ceux qui ont exhibé une matrice P.

12c. La rédaction a souvent été très décevante pour cette question. Trouver un élément ne donne qu'une inégalité sur le max, et ne suffit pas à répondre correctement à la question.

13. Cette question a souvent été traitée correctement.

14. La question 14.a a été traitée plus ou moins élégamment. La 14.b, assez technique, l'a été beaucoup moins.

15a. Les candidats ont été assez nombreux à traiter cette question, de façon plus ou moins élégante.

15b. Très peu de candidats ont traité la seconde partie de la question, pour laquelle il « suffisait » d'utiliser $|U_{i,j}V_{j,i}| \leq \frac{1}{2}(|U_{i,j}|^2 + |V_{j,i}|^2)$.

15c. Cette question a souvent été traitée sans les justifications qui auraient convenu.

16. Peu de candidats ont démontré correctement et intégralement cette question.