Mathématiques 2

Présentation du sujet

Le problème propose l'étude de certaines propriétés de la matrice de Hilbert H_n. Les parties I et II ont un caractère préliminaire. Dans I, on établit le critère de Sylvester-Jacobi (caractérisation des matrices symétriques définies positives par la stricte positivité des mineurs principaux).

Dans II, on introduit les polynômes de Legendre relatifs au segment $[0, 1]$, afin d'obtenir une base de l'espace des polynômes réels échelonnée en degré et orthogonale pour le produit scalaire intégral canonique. La matrice H_n est introduite au début de la partie III. La sous-partie III.A est consacrée au calcul du déterminant de H_n et à quelques conséquences, tandis que III.B relie l'inverse de H_n à un problème de projection orthogonale. Le but essentiel de la partie IV est de prouver que l'inverse de H_n est à coefficients entiers.

Analyse globale des résultats

Ce sujet, assez long, mais de facture très classique, demandait une bonne maitrise du calcul matriciel, des déterminants, des espaces préhilbertiens et des matrices symétriques. Les questions étaient de caractère et de niveaux variés. C'est ainsi que la partie I, relativement théorique, était équilibrée par la partie II, plus concrète et proche du cours, que les sous-parties III.A et III.B testaient des qualités de nature différente. D'autre part, l'organisation en parties largement indépendantes permettait de ne pas bloquer les candidats.

Chaque partie du problème a ainsi été abordée, avec plus ou moins de bonheur, par un nombre significatif de candidats. Le résultat final est contrasté. Beaucoup de copies sont faibles. Une part importante de travaux témoigne d'une compréhension convenable des questions (et donc de qualités scientifiques) mais souffre d'une argumentation souvent approximative ou de lacunes techniques. Le sujet a également mis en évidence un lot raisonnable de bons et très bons candidats.

Commentaires sur les réponses apportées

Partie I

Cette partie demandait une bonne compréhension des liens entre matrices symétriques, endomorphismes autoadjoints et formes quadratiques. Elle a été souvent mal réussie, faute en général d'une étude suffisamment approfondie du cours afférent. Les questions I.A.1 et I.A.2, conséquences immédiates du théorème spectral, n'ont pas eu le succès qu'on pouvait escompter. La question I.B.1, un peu plus délicate, pouvait être traitée élégamment en utilisant la forme bilinéaire canoniquement attachée à une matrice symétrique, ou par un petit calcul matriciel équivalent quant au fond ; beaucoup de candidats ont affirmé que le spectre de $A^{(i)}$ est contenu dans celui de A, ce qui est manifestement faux en général. Les questions I.B.3.a et I.C ont eu peu de succès. Certains candidats y ont remplacé A par une matrice diagonale qui lui est orthogonalement semblable, sans se rendre compte que, ce faisant, ils changeaient de base. Enfin, la procédure demandée dans la question I.D, pourtant relativement élémentaire, n'a été écrite correctement que dans fort peu de copies.

Partie II

Beaucoup de candidats ont abordé cette partie simple. Si le fond est souvent à peu près compris, la rédaction laisse à désirer dans de nombreuses copies. Citons en vrac :

- en II.A, vérification incomplète de la bilinéarité, confusion entre polynômes et fonctions polynomiales pour le caractère défini du produit scalaire ;
- en II.B, calcul très maladroit de la dérivée n-ième en 1, immédiat par étude locale ;
- en II.C, manque de soin dans les intégrations par parties ;
- en II.E, l'unicité est mal comprise, ce qui témoigne d'un certain manque de vision géométrique.

Partie III

La calculatrice facilitait les calculs d'inverses de III.A.1 ; rappelons aux candidats que son utilisation est encouragée. Quelle que soit la méthode choisie, les résultats devaient être présentés sous une forme simplifiée.

La relation de récurrence de III.A.2, non triviale, a été abordée dans d'assez nombreuses copies ; les justifications sont cependant souvent trop elliptiques.

La question III.B.1 nécessitait simplement de citer un résultat du programme (projection sur un sous-espace de dimension finie d'un espace préhilbertien) ; encore fallait il expliciter complètement l'énoncé et les hypothèses. La résolution de III.B.2 revenait à reconstituer le raisonnement menant à la formule de Parseval. Le lien avec le théorème de Weierstrass est assez souvent mentionné, mais peu d'argumentations sont vraiment complètes, ce qui laisse l'impression que l'étude du cours est souvent trop superficielle.

Partie IV

Les premières questions de IV.A et IV.B étaient simples et ont été assez fréquemment abordées. La fin de IV.B n'a concerné qu'une poignée de très bons candidats.

Conclusions

Les correcteurs rappellent en premier lieu que la maitrise d'un corpus mathématique se mesure aussi bien sur des questions théoriques (qui nécessitent une compréhension réelle du cours, démonstrations comprises) que sur des aspects plus pratiques (capacité à mener efficacement et rapidement des calculs simples). La réussite aux épreuves de mathématiques passe par cette double capacité.

Quelques remarques formelles pour terminer. Cette année encore, beaucoup trop de copies sont peu lisibles, mal présentées et/ou mal rédigées. Ces défauts sont systématiquement sanctionnés. Il est indispensable de rédiger avec clarté et concision et de mettre en évidence les résultats obtenus.