

## Rapport sur l'épreuve de mathématiques 2

L'épreuve de Mathématiques 2 portait sur l'algèbre linéaire, avec quelques questions relatives aux espaces euclidiens. Le problème n'était pas particulièrement long et a pu être entièrement traité par les meilleurs candidats. Il comprenait beaucoup de questions simples, résultats classiques ou questions de cours, destinées à valider les acquis des deux années de classes préparatoires et à attribuer les points correspondants. Un nombre limité de questions était destiné à identifier le meilleur niveau de compréhension des concepts ou la capacité de synthèse des étudiants.

Afin de ne pas bloquer un étudiant qui n'aurait pas répondu à une question, des résultats intermédiaires, qui étaient donnés, permettaient d'aborder les questions suivantes du problème.

La présentation des copies est globalement satisfaisante, beaucoup d'étudiants font un effort dans ce sens. Néanmoins, les résultats ne sont pas toujours mis en évidence. On recommande de faire ressortir les résultats essentiels, par exemple la valeur de la trace d'une matrice, lorsque c'est une partie de la réponse à une question.

Le niveau moyen des candidats, sur cette épreuve, semble satisfaisant. Il reste toutefois un nombre trop important d'étudiants qui ne maîtrisent pas les notions de base, sans lesquelles toute progression dans un problème est impossible.

Le problème portait sur une étude des itérés d'un vecteur par un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie.

### Partie I

Dans cette partie, on faisait étudier un exemple, dans le cas relativement élémentaire de l'espace vectoriel  $\mathbf{R}^2$ . Cet exemple servait aussi à vérifier les connaissances de base des candidats, avec des questions détaillées et progressives.

Dans la question I.1, l'espace  $\mathbf{R}^2$  était rapporté à une base orthonormale directe  $\mathcal{E} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2)$  et on considérait un endomorphisme  $l$  défini par sa matrice  $M$  relativement à une autre base donnée  $\mathcal{V} = (v_1, v_2)$ . Les vecteurs  $v_1$  et  $v_2$  étaient définis par leurs composantes relativement à la base  $\mathcal{E}$ . Il s'agissait de caractériser l'endomorphisme  $l$  (la rotation d'angle  $\theta$ ).

Dans I.1.1, le polynôme caractéristique de  $l$  est donné correctement, mais les valeurs propres, ses racines, nécessitent que l'on connaisse au moins la formule de trigonométrie  $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$  pour simplifier  $\cos \theta \pm i\sqrt{1 - \cos^2 \theta}$ . Parfois on lit  $\cos \theta \pm \sqrt{\cos^2 \theta - 1}$  !

Dans I.1.2, la base  $\mathcal{V}$  n'étant pas orthonormale, le vecteur  $v = x_1 v_1 + x_2 v_2$  ne vérifie pas  $\|v\|^2 = x_1^2 + x_2^2$ .

Dans I.1.3, le problème du changement de base est bien souvent mal maîtrisé : confusion entre les matrices de passage  $P$  et  $P^{-1}$ , expression  $M' = P^{-1}MP$  au lieu de  $M' = PMP^{-1}$ , écriture d'une matrice de passage avec les composantes des vecteurs en lignes au lieu d'être en colonnes. Enfin, certains étudiants qui ont su trouver la bonne expression de la matrice  $M'$  de  $l$  relativement à la base  $\mathcal{E}$ , reconnaissent la matrice classique d'une rotation, mais

oublie d'écrire que c'est la rotation d'angle  $\theta$ , donnant ainsi un résultat incomplet alors qu'ils ont tout sous les yeux.

La sous-question I.1.4 est globalement assez mal traitée. Pour montrer la formule  $(v_1|v_k) = \cos(k-1)\theta$ , les étudiants utilisent la rotation d'angle  $\theta$ , mais oublient souvent d'écrire que les deux vecteurs sont normés. En revanche, un grand nombre de candidats utilisent ce résultat, démontré ou non, pour en déduire  $(v_2|v_k) = (l(v_1)|l(v_{k-1})) = (v_1|v_{k-1})$  puisque  $l$  est un automorphisme orthogonal,  $= \cos(k-2)\theta$  ; c'est ce que l'on attend d'eux.

Dans la résolution du système linéaire qui suit, on aimerait lire que c'est un système de Cramer, car son déterminant  $\sin^2 \theta \neq 0$ .

Dans la question I.2, on définissait un deuxième produit scalaire pour lequel la base  $\mathcal{V}$  était orthonormale, et on demandait de trouver l'équation d'une conique passant par des points dont les coordonnées étaient données. Une des conditions conduisait à simplifier par le facteur  $\cos \theta$ , il fallait penser à écrire que  $\cos \theta \neq 0$ .

Enfin presque tous les candidats trouvent les éléments propres de la matrice  $Q$ , qui est la matrice symétrique associée à l'équation de la conique, mais très peu justifient que c'est une ellipse (valeurs propres non nulles et de même signe). Il y a souvent un manque de précision sur l'obtention de l'équation réduite. Le graphe varie de l'esquisse gribouillée au tracé le plus soigné.

## Partie II

Dans la deuxième partie, on faisait établir, sous différentes hypothèses, des propriétés entre un endomorphisme et la famille des itérés d'un vecteur par l'endomorphisme.

Les raisonnements élémentaires de l'algèbre linéaire permettaient de traiter la question II.1, qui portait sur les propriétés des familles libres ou des familles génératrices de vecteurs ; cette question est souvent traitée de façon incomplète. En particulier, pour montrer que lorsque la famille  $(u, l(u))$  est liée, alors  $u$  est un vecteur propre de  $l$ , il faut un raisonnement précis utilisant l'hypothèse  $u \neq 0$ .

La rédaction de la question II.2, qui porte sur un exemple, peut être simplifiée par l'utilisation de la calculatrice, qui donne la valeur du déterminant. Pour prouver que la famille  $(e_1, f(e_1), f^2(e_1))$  est libre, il ne suffit pas d'écrire que les vecteurs sont deux à deux linéairement indépendants ; il est simple d'écrire une combinaison linéaire nulle et de montrer que les coefficients sont nuls en résolvant un système linéaire.

Dans la question II.3, il faut savoir écrire la matrice d'un endomorphisme relativement à une base.

La notion d'idéal de la question II.4 a été quelque peu malmenée ; toutes les hypothèses pour que  $I(l, u)$  soit un idéal ne sont pas toujours vérifiées. Pour montrer l'existence d'un générateur unitaire  $G(l, u)$ , il fallait d'abord montrer que l'idéal n'était pas réduit à 0 (il contenait le polynôme caractéristique).

Dans les applications de la fin de cette question à la détermination des polynômes  $G(l, u)$  des questions II.3 et II.4, les candidats ont les idées pour trouver les polynômes, mais il manque très souvent les justifications que  $G(l, u)$  est unitaire et de degré  $r(l, u)$  (soit 3 ou  $n$ ).

L'endomorphisme de la question II.5 est nilpotent. On trouve trop peu de polynômes caractéristiques justes. Il suffisait d'utiliser un polynôme annulateur pour montrer que le spectre était réduit à 0, puis d'écrire que le degré du polynôme caractéristique étant  $n$ , c'était alors  $X^n$  (au signe près).

Lorsqu'elle est traitée, l'implication (1)  $\Rightarrow$  (2) est juste, rarement la réciproque.

Dans la question II.6, on aimerait plus de justifications dans le raisonnement : " $AC = 0 \Rightarrow C = 0$ , donc la matrice  $A$  est inversible" ; par exemple  $A$  est la matrice d'un endomorphisme injectif, donc bijectif.

Enfin, les candidats qui abordent la dernière question, pensent assez souvent au vecteur  $u = \sum w_k$ , qui vérifie  $r(l, u) = n$ .

En conclusion de ce rapport, on recommande aux candidats une rédaction soignée dans les questions de raisonnement, et bien sûr la connaissance du cours, qui est à la base de la réussite.

Christian Dupuis