L'épreuve portait sur l'interpolation polynômiale d'une fonction.

Lors de la première partie, après avoir défini des polynômes d'interpolation, on calculait une norme subordonnée, puis grâce au théorème de Rolle, on obtenait une estimation de l'écart entre une fonction et un de ses polynômes d'interpolation.

Dans la deuxième partie, l'étude d'une fonction φ définie sur $[0, n]$, permettait de majorer l'écart entre une fonction et un polynôme d'interpolation en $n + 1$ points équidistants.

Dans la partie III, on établissait des formules barycentriques à coefficients entiers, qui servaient à obtenir des valeurs approchées pour une fonction trigonométrique.

L'épreuve couvrait une large part du programme des deux années de classes préparatoires (théorème de Rolle, théorème des valeurs intermédiaires, norme subordonnée, série...) ; elle permettait de se faire une idée du niveau d'assimilation de diverses notions d'analyse, de l'aisance technique du candidat ainsi que de son esprit de synthèse.

Les trois parties pouvaient être abordées et elles l'ont été très largement.

Partie I

De nombreux candidats auraient pu tirer un bien meilleur profit en traitant mieux le début très classique sur l'interpolation de Lagrange :

-Nombreux sont ceux qui sont déroutés par une question sur le produit scalaire et qui ne savent pas faire ressortir l'essentiel, en l'occurrence le caractère défini (ou non) de la forme bilinéaire B, ou bien ceux qui ont beaucoup de difficulté pour montrer qu'une famille de polynômes est une base orthonormale et qui, à court d'argument, affirment que la famille est libre car les polynômes sont échelonnés en degrés.

-La définition des polynômes d'interpolation ne pose guère de difficulté aux candidats, la seule difficulté étant, pour certains, d'établir correctement l'unicité.

-Trouver un polynôme d'interpolation associé à un polynôme est une question indiscrète, de même que demander la valeur de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} L_k(x)$.

La question I.3 nécessitait un minimum d'aisance lors de la manipulation des bornes supérieures ; parmi les candidats qui ont abordé cette question, beaucoup ont fourni des arguments tout à fait acceptables au moins en I.3.1 et I.3.2 ; en revanche en I.3.3, si le résultat est trouvé, beaucoup oublient de vérifier que la fonction ψ est dans la boule unité.

La suite de la partie est assez bien traitée, avec néanmoins une erreur très systématique en I.5.1 : "$P_{n+1}(x) - P_n(x) = \displaystyle\sum_{i=0}^{n+1} B(f, L_i)L_i - \sum_{i=0}^{n} B(f, L_i)L_i = B(f, L_{n+1})L_{n+1}$", les candidats ne s'étant pas rendu compte que les L_i ne sont pas les mêmes dans les deux sommes.

Partie II

Cette partie a eu la préférence des candidats ; certains n'ont d'ailleurs traité que cette partie.

L'étude du maximum de φ devient difficile lorsque le candidat ne pense pas à la continuité et veut utiliser la dérivée. Ensuite les calculs concernant les égalités se passent très bien, contrairement aux manipulations sur les inégalités et les valeurs absolues.

Une affirmation souvent lue : "$\varphi(t-1) \geq \varphi(t)$ entraîne φ décroissante".

Les questions II.2, II.3 et II.4 ont été dans l'ensemble très favorables aux étudiants ; il faut simplement signaler :
-la difficulté de certains pour dériver $\ln|t-k|$,
-la facilité pour beaucoup de candidats à négliger les deux premiers termes d'une somme,
-l'affirmation "$\dfrac{\varphi'}{\varphi}$ est strictement décroissante entraîne φ' est strictement décroissante",
-la justification très partielle de l'inégalité 2 en II.5.2 avec une utilisation des bornes supérieures et des valeurs absolues peu satisfaisantes.

Partie III

Cette partie assez calculatoire n'a pas découragé les candidats et nombreux sont ceux qui l'ont abordée avec succès, au moins sur le début.
Les meilleurs candidats ont obtenu la majoration en II.4.4.
Pour la limite de $\theta(n,p)$, rares sont ceux qui utilisent un argument de série, ils préfèrent utiliser la formule de Stirling.

Nous ne saurions trop inciter les candidats à réfléchir quelques minutes devant le sujet et à raisonner quelque peu avant de proposer une solution bien adaptée à la question posée ; cela pourrait aussi éviter d'écrire à la fin du problème qu'un écart tend vers $+\infty$, ce qui serait pour le moins fâcheux pour une approximation digne de ce nom!

François Gauthier