Composition de Mathématiques, Filière PC

Rapport de Mme Olga KRAVCHENKO et M. Stéphane ATTAL, correcteurs.

Les notes des candidats français se répartissent selon le tableau suivant :

$0 \leqslant \mathrm{N} < 4$	78	17,8 %
$4 \leqslant \mathrm{N} < 8$	357	39,4 %
$8 \leqslant \mathrm{N} < 12$	540	30,0 %
$12 \leqslant \mathrm{N} < 16$	245	10,2 %
$16 \leqslant \mathrm{N} \leqslant 20$	48	2,6 %
Total	1268	100 %
Nombre de copies : 1268		
Note moyenne 9,29		
Écart-type : 3,56		

Remarques générales

Dans l'ensemble il s'agissait cette année d'un sujet assez difficile, les notations étant parfois assez lourdes à manipuler, certaines questions étaient relativement longues à résoudre, d'autres demandaient vraiment une idée. Autant dire tout de suite que ce sujet n'a pas remporté un franc succés auprès des candidats !

Même si la seconde partie porte sur de l'algèbre linéaire, la grande majorité du sujet faisait appel à de l'analyse : convergence de séries de fonctions, séries de Fourier, convergences dominées, preuves de continuités de fonctions, majorations, etc.

Signalons une erreur de logique qui est apparue assez souvent dans les réponses à plusieurs questions. A plusieurs endroits dans le sujet il fallait montrer que « l'unique solution était de cette forme », que « les valeurs propres étaient exactement les nombres suivants », etc. Dans une très grande majorité des copies on trouve alors le raisonnement suivant : « si ϕ est une solution alors ... » et ils trouvent la forme annoncée, ou encore « si λ est une valeur propre alors ... » et on trouve qu'elle doit être de la forme annoncée. Mais le raisonnement ne doit pas s'arrêter là ! Il faut montrer que la fonction obtenue est bien une solution (ce qui parfois demandait de vérifier des convergences de séries), ou que tous les nombres obtenus sont bien valeurs propres (i.e. trouver un vecteur propre explicite pour chacun).

Faisons aussi une remarque générale sur la rédaction. Les arguments du genre « l'assertion est vrais d'après les théorèmes généraux », « d'apres les théorèmes usuels », ou même « par théorème du cours » n'ont aucune valeur si on ne précise pas plus quels sont les théorèmes concernés, les hypothèses etc.

Passons maintenant au détail, question par question.

Première partie

Cette première partie était notée sur 8 points environ.

La question 1a) n'a posé aucun problème en général.

La **question 1b)** est typique de la remarque faite plus haut. Beaucoup de candidats ont montré que si (E_z) possède une solution alors elle est d'une certaine forme. Mais cela ne suffit pas ! Il faut maintenant montrer que cette fonction, obtenue à partir de manipulations formelles sur l'équation, constitue bien une solution (bien définie, régularité suffisante, solution). Et ça, quasiment personne ne l'a fait.

Les réponses des candidats pour la preuve de la continuité à la **question 2a)** ont beaucoup énervé les correcteurs. On a affaire à une intégrale d'une fonction à paramètre, dont on demande de montrer qu'elle est continue en ce paramètre. Des réponses du genre « l'intégrale d'une fonction continue étant toujours continue », ou encore mieux « d'après le théorème fondamental de l'analyse cette intégrale est continue » sont inacceptables. Il y a au moins un argument à développer, soit utiliser de la convergence dominée, soit invoquer un théorème du cours parce qu'ici on intègre sur un intervalle compact.

Pour la **question 2b)**, c'est le même problème qu'en 1b) mais en plus grave. En travaillant formellement, en Fourier, sur l'équation, on obtient une forme nécessaire pour les coefficients de Fourier de la solution. Mais le raisonnement ne s'arrête pas là ! Il reste beaucoup de travail. Il faut montrer que cette série de Fourier est bien convergente, i.e. qu'elle permet bien de construire une fonction qui sera alors automatiquement solution de l'équation. Et cela demandait pas mal d'arguments (utiliser la régularité C^2 et C^1 de f et K). Tout le monde (ou presque) est passé à côté.

Pour la **question 3)**, dans l'ensemble les réponses sont correctes mais souvent incomplètes. Beaucoup oublient de traiter le cas $z = 1$. Beaucoup aussi oublient d'utiliser les conditions initiales, qui sont ici explicites.

Deuxième partie

Cette deuxième partie était notée sur 5 points environ.

La **question 4a)** a été globalement traitée sans difficulté.

Dans la **question 4b)** beaucoup de candidats ont montré que $zI - A$ est inversible, mais très peu ont sû en profiter pour retrouver la solution du 1b). Il n'y avait pourtant pas grand chose de plus à faire qu'appliquer la formule trouvée en 4a) à l'exemple.

Un nombre non négligeable de copies ont même trouvé une solution différente de celle de 1b), sans que cela ne les choque.

Pour les valeurs propres du **5a)**, c'est essentiellement le problème évoqué au début que l'on a retrouvé. Beaucoup de candidats montrent que si λ est une valeur propre (i.e. si il existe une fonction propre) elle doit être de la forme $\widehat{K}(n)$, mais très peu pensent à montrer que toutes ces valeurs admettent effectivement une fonction propre. Il fallait en exhiber une explicitement. Ce qui était d'ailleurs facile. Le problème vient plutôt du raisonnement logique.

La **question 5b)** demandait effectivement d'avoir une petite idée. On a une forme explicite formelle pour ce que devraient être le solution (en série de Fourier), reste à trouver un critère pour que cette série définisse une fonction continue. Par exemple la convergence absolue de la série des coefficients de Fourier. Moins de 5 candidats sur 1500 ont répondu à cette question.

Troisième partie

Cette troisième partie était notée sur 13 points environ. Ces points se divisent en 5 points pour les questions de 6) à 7) incluses et 8 points pour les questions de 8) à 12). Nous mettons l'accent sur cette division car, autant les questions 6) à 7) ont été assez bien traitées en général, autant celles de 8) à 12) ont rencontré très peu de succès.

Pour la **question 6a)** nous avons rencontré le même problème que précédemment pour justifier la continuité de ces intégrales à paramêtres. Il fallait démontrer la continuité à la main car la continuité de ces fonctions à deux variables n'est pas au programme de PC. Les correcteurs se sont montrés particulièrement souples par rapport aux réponses des candidats. Nous avons admis toutes les réponses admettant des généralisations à deux variables des théorèmes connus de continuité de l'intégrale à paramètre, nous avons admis avec de grandes largesses les démonstrations à la main de la continuité. Mais le problème ne se situait pas là, il venait de ce que encore une fois beaucoup de candidats écrivaient que « l'intégrale d'une fonction continue est toujours continue » !

Dans la **question 6b)** tout le monde montre facilement que les coefficients de la série entière sont majorés, en module, par $\alpha^k M^k$, mais beaucoup de candidats ont ensuite beaucoup de mal à en déduire quelque chose sur le rayon de convergence de la série. Ce qui est vraiment étonnant et dérangeant.

Dans la **question 6c)** la continuité a été à nouveau plus ou moins bien traitée. Il fallait utiliser la convergence normale pour démontrer à la main la continuité de A (on n'a pas de théorème du cours dans le programme, mais la démonstration se fait en 3 lignes grâce à la convergence normale).

La **question 7)** a été plutôt facilement résolue.

Pour les question 8) à 12) on entre dans une zone qui a été ignorée par plus de 80 % des candidats.

La **question 8)** consistait juste à intégrer la relation obtenue en 7) par rapport à $s_n, \ldots, s_1$. Il fallait faire assez attention, les notations sont lourdes et il fallait justifier par le théorème de Fubini l'interversion de l'ordre d'intégration dans certaines intégrales.

Question 9). En utilisant les majorations données au début du sujet on se retrouve assez facilement avec à devoir traiter la convergence d'une série du type

$$\sum_n \frac{n^{n/2}}{n!} \beta^n .$$

On y arrive alors sans trop de difficulté avec un critère de d'Alembert, par exemple.

Question 10). On applique à nouveau l'inégalité de Hadamard, on intègre n fois et on trouve une estimation du même type que ci-dessus.

Question 11). Le calcul formel se fait assez aisement, il faut juste bien penser à justifier, grâce à la convergence normale, une interversion série–intégrale.

Question 12). Le fait que ϕ_z est solution n'était pas difficile à vérifier. Par contre la question un peu difficile était l'unicité. Elle n'a pas fait beaucoup d'heureux (1 ou 2 candidats).