1.2 B – MATHEMATIQUES I – filière PC

LE SUJET

Le sujet de l'épreuve propose d'établir une version faible du théorème de la limite centrale dans le cas de variables aléatoires à densité de probabilité continue et bornée sur $\mathbb{R}$. Ce résultat intervient en théorie des probabilités.

Les parties du programme du concours utilisées comme objets ou outils sont :

- la notion de normes sur les espaces classiques de fonctions,
- la notion de calcul intégral à une ou deux variable(s), notamment le théorème de Fubini qui est admis,
- la notion d'algèbre de convolution,
- les développements limités dans une moindre mesure.

Le but est d'établir qu'une suite $(T_{f_n^{*n}})_n$ de fonctionnelles d'itérées pour l'opérateur de convolution converge faiblement vers la fonction gaussienne

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Les connaissances et les savoir-faire permettant d'aborder le problème sont essentiellement de bonnes manipulations : des normes, de calcul intégral, en particulier l'interversion limite-intégrale (théorème de *convergence dominée*) et des inégalités. Un esprit de synthèse permettait de dégager l'articulation et l'enchaînement des questions posées.

Le problème est constitué de quatre parties qui peuvent être résolues de façon indépendante puisque les questions sont fermées, à l'exception de la question 14 (où il s'agit de trouver la limite d'une intégrale élémentaire à un paramètre) utilisée par la suite. La formulation de l'introduction des trois ensembles $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$, $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$ et $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ fait malencontreusement que le troisième ensemble est pris aussi pour un espace vectoriel, sans conséquence notable ni sur le déroulement de l'épreuve, ni sur l'évaluation des copies.

I) REMARQUES GÉNÉRALES

En ce qui concerne les productions des candidats

Forme

En général, les copies sont assez bien présentées et les questions sont clairement indiquées. Il est très rare de trouver des candidats qui papillonnent d'une question à une autre. En effet, tel qu'il est construit, le problème, bien qu'il pose des questions fermées et enchaînées, ne favorise pas ces allers et retours. Il nécessite une bonne compréhension du lien entre les quatre parties et un esprit de synthèse. Le barème ne prend pas en compte cette compétence de façon précise, à l'exception de la dernière question qui en est un élément. On a ainsi vu les candidats, d'une manière générale, suivre de façon linéaire les questions posées.

Il faut noter cependant que, dans de rares copies, la qualité calligraphique est médiocre ; Elles est due parfois tout simplement à des stylos qui ne fonctionnent pas. Même si bon nombre de candidats sont très rétifs à énoncer de façon claire leurs procédures, se contentant d'aligner des formules mathématiques, certains montrent qu'ils ne maîtrisent même pas l'orthographe de mots courants dans le discours des mathématiques de leur niveau.

Fond

Le problème se décline en plusieurs questions (19 exactement) dont la dernière est une synthèse pour établir le résultat souhaité. La majorité arrive tant bien que mal à la question 14 et la moyenne est obtenue lorsque les candidats ont correctement répondu à 7 ou 8 questions.

Sur le plan mathématique

Au mieux, le candidat arrive à s'approprier l'objet du problème en tentant de répondre à la dernière question., sans pour autant, avoir pu aborder ou répondu à toutes les questions. Les notions de convergence d'intégrale et /ou intégrabilité sont loin d'être acquises. L'erreur la plus répandue est qu'une constante (non nulle) M est intégrable sur $\mathbb{R}$! Les connaissances des candidats sur le sujet semblent être très fragiles voire entachées de confusions.

On a vu des candidats énoncer des *"théorèmes"* inédits ou inventer des formules (une formule de Fubini sur la droite réelle) dont le non sens n'interpelle même pas le candidat.

Des candidats se contentent parfois de l'expression "*par récurrence on a* ". D'autres appliquent le principe de récurrence sur les entiers pour un paramètre continu. La *dévolution* au problème est en général mal réussie bien que certaines questions du début du problème ont été convenablement traitées, voire de façon originale.

La question 11, un résultat d'existence où le candidat doit avoir une bonne compréhension du calcul intégral et la comparaison de croissance polynôme et exponentielle avec un paramètre, est rarement abordée.

Les questions de 14 à 19 ont été aussi très rarement abordés. On note aussi, pour prouver la continuité d'une intégrale par rappport à un paramètre, une application maladroite du théorème de la convergence dominée en prenant comme fonctions dominantes des fonctions non intégrables.

L'inégalité de Cauchy-Schwarz est appliquée pour des fonctions de carré non obligatoirement intégrable ou pour la norme "infini" $\|.\|_{\infty}$.

On note également une confusion entre les normes et une mauvaise maîtrise des propriétés liant l'intégrale et l'inégalité triangulaire. Il est surprenant que certains candidats n'ont pas été interpellés par le fait de trouver que l'intégrale d'une fonction continue positive est un nombre négatif, voire nul! Ils n'ont pas réussi à utiliser convenablement l'inégalité triangulaire ou la formule de dérivation d'une fonction composée, ou d'un produit.

Le calcul des intégrales de la question 8 est une occasion d'avoir des primitives complètement aberrantes. D'autres questions font apparaître des intégrations par partie pour des fonctions continues. On signale quelques solutions originales pour les questions 6 et 7.

L'ambiguté de l'énoncé sur la structure de $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ n'a pas eu d'incidence notable sur la production des candidats. Cependant, pour répondre à la question 3, certains confortés par l'erreur prégnante (classique) chez beaucoup d'élèves (par analogie aux séries) "*toute fonction intégrable sur* $\mathbb{R}$ *admet* 0 *comme limite en* $\pm\infty$" , expliquent que cette *propriété* implique que $\mathcal{P}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{C}_0^{\infty}(\mathbb{R})$.

Le développement limité d'ordre 2 dont on a besoin dans la question 17 montre que beaucoup de candidats n'ont pas d'idée sur la nature de l'approximation mise en jeu (locale ou globale).

Enfin, sur le plan de la rédaction du raisonnment, beaucoup se contentent d'*invoquer* un théorème sans le citer explicitement, ni préciser les données pour lesquelles il est appliqué, laissant le correcteur le soin de spéculer sur "*ce que le candidat a voulu dire*".

II) REMARQUES PARTICULIÈRES

La liste ci-dssous n'est pas exhaustive.

Q 1 Domination de la fonction $f(t)g(x-t)$ sur $\mathbb{R}$ par une constante ou par une fonction non positive, mauvaise manipulation de l'intégration et des inégalités. On a $f*g = g*f$ car la multiplication est commutative sur $\mathbb{R}$. On a du mal à prouver l'existence du nombre $f*g(x)$ alors que la continuité est correctement expliquée. Une fonction de limite nulle en $\pm\infty$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.

Q 2 Confusion entre le théorème de convergence dominée et convergence normale pour une série introduite ad hoc. La caractérisation séquentielle de la limite n'est pas souvent évoquée. La fonction $g \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ tend vers 0

car elle est intégrable (analogie avec le cas de convergence d'une série) et donc $f * g(x_n)$ converge vers 0 [1]. L'égalité $f * g = g * f$ de la question 1 induit une permutation des hypothèses sur f et g.

Q 3 La vérification des conditions 1 et 3 d'application du théorème de Fubini ne sont pas correctement faites, en général à cause de confusion sur les variables. Une formule inédite de Fubini ou multiplicative de l'intégrale : $\int_{\mathbb{R}} f(y)g(y-x)dy = \int_{\mathbb{R}} f(y)dy \int_{\mathbb{R}} g(y-x)dy$. L'ensemble $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ est contenu dans $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ car toute fonction intégrable sur $\mathbb{R}$ converge vers 0 en $\pm\infty$. Pour établir que $f * g$ est bornée, des inégalités de Cauchy-Schwarz sont appliquées soit pour des fonctions non forcément de carré intégrables, soit pour la norme "infini" $P.P_{\infty}$.

Q 4 Trois difficultés se superposent ici pour les candidats : la manipulation de la norme $P.P_{\infty}$ en x, l'inégalité triangulaire et l'intégration. Grande confusion entre $\sup_{x\in\mathbb{R}} u(x-t)$, $\sup_{t\in\mathbb{R}} u(x-t)$, $\sup_{(x,t)\in\mathbb{R}^2} u(x-t)$ et sur aussi les formules analogues pour $|u|$.

Q 5 L'égalité $T_{f*g} = T_f * T_g$ est utilisée de façon implicite, le reste se fait de façon formelle. Certains évoquent ou confondent la loi $*$ avec la multiplication sur le corps des réels.

Q 6 L'astuce qui consiste à rajouter puis retrancher le terme $T_{f_1}T_{g_2}(u) = T_{g_2}T_{f_1}(u)$ n'est pas vue. L'inégalité triangulaire est utilisée parfois dans le mauvais sens. Des solutions originales basées sur la deuxième inégalité triangulaire $||a|-|b|| \leq |a-b|$.

Q 7 La preuve par récurrence est vue, mais il y a des difficultés pour l'amorcer si on choisit de commencer pour $n = 2$. L'inégalité $T_f^n = T_{f^{*n}}$ est utilisée de façon implicite. Parfois on se contente d'écrire l'expression (magique)" : par "*récurrence on a...*". Même suite de remarques que la question précédente.

Q 8 Beaucoup montrent une insuffisance criante dans la justification de l'existence des intégrales et/ou de leur calcul. La comparaison de la croissance pour appliquer le critère de Riemann n'est pas maîtrisée. La valeur de l'intégrale (d'une borne inférieur à une borne supérieure) d'une fonction positive est un nombre strictement négatif ! Mauvaises intégrations par partie. Des primitives de type $\int e^{-x^2}dx = -\frac{1}{2x}e^{-x^2}$! Récurrence sur le paramètre réel h!

Q 9 Si beaucoup voient que la preuve peut se faire par récurrence, *elle est mal faite* et souvent on ne fait que paraphraser la question. L'inégalité $T_f^n = T_{f^{*n}}, f = g_{\frac{h}{\sqrt{n}}}$ est utilisée de façon implicite.

Q 10 La récurrence est réussie pour justifier la valeur du degré du polynôme $P_{k,h}$ quand la formule de la dérivation de $e^{-\frac{x^2}{2h^2}}$ en tant que fonction composée ou la formule de Leibniz $(UV)' = U'V + UV'$ est correctement faite (rarement le cas).

Q 11 La question est souvent traitée, mais peu réussie. Les difficultés des candidats sont de deux ordres : le traitement du découpage en liaison avec l'inégalité triangulaire dans l'exponentielle pour le polynôme $P_{k,h}$ (on trouve des inégalités du genre $|a_0 + a_1x + \ldots + a_px^p||a_0| + |a_1|x + \ldots + |a_p|x^p$) et les majorations correspondantes. La variable $u = x - t$ pose problème aux candidats pour pouvoir ressortir une majoration

[1] On donne ici un *contre-exemple* simple à cette conception erronée, très répandue chez les élèves. La fonction (suite de triangles) F, affine par morceaux, telle que pour tout entier naturel $n1$, $F(n - \frac{1}{2n^3}) = F(n + \frac{1}{2n^3}) = 0$, $F(n) = n$ (respectivement $F(n) = 1$), et nulle par ailleurs, est intégrable non bornée (respectivement bornée) et ne tend pas vers zéro en plus l'infini. Dans les deux cas l'intégrale est la somme d'une série de Riemann.

uniforme par rapport à la variable $x \in [-a, a]$ ou pour la dérivation d'ordre k par rapport à x .

Q 12 Dérivation par rapport à x du terme $u(x-t)$. L'expression de la k-ième dérivée $\int_{-\infty}^{+\infty} u(t) P_{k,h}(x-t) e^{-\frac{(x-t)^2}{2h^2}}$ est assez abordée mais pas correctement traitée.

Q 13 Le théorème de convergence dominée est mal appliqué. La domination est difficile à trouver, car pour $t \in \mathbb{R}$, on n'arrive pas à faire ressortir la norme PuP_∞ dans l'inégalité $|F(t)| PuP_\infty |P_{k,h}(t)| e^{-\frac{t^2}{2h^2}}$. La caractérisation des éléments de $C_0^\infty(\mathbb{R})$ par une limite nulle pour toutes les dérivées est oubliée.

Q 14 Très rare traitement par le changement de variable. Des tentatives d'application maladroite du théorème de convergence dominée par rapport au paramètre h.

Q 15 Rarement traitée. Si la normalisation $u(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(x) g_h(t) dt$ est utilisée et l'inégalité de la continuité uniforme est posée, on a cependant du mal à établir l'égalité qui fait ressortir le ε et les intégrales de la question précédente.

Q 16 Rarement traitée. Difficulté de la réécriture de $T_{f_n}(u) - T_f(u)$, de la justification des inégalités triangulaires et le découpage en ε.

Q 17 Rarement traitée. L'établissement du développment limité et la justification de l'intégrabilité en 0 sont déficients.

Q 18 Elle est survolée par de rares candidats. L'usage de l'inégalité de Taylor-Lagrange et sa justification sont complètement absents.

Q 19 De rares candidats ont osé aborder avec succès cette question faisant la synthèse des questions précédentes et énoncer correctement le résultat du problème.

III) <u>CONSEILS AUX FUTURS CANDIDATS</u>

La résolution d'un problème nécessite une bonne compréhesion des notions utilisées ainsi qu'un bon savoir-faire des techniques calculatoires correspondantes. Beaucoup de candidats ont montré une insuffisance criante pour l'une ou l'autre compétence ou les deux à la fois.

Pour bien comprendre une notion et appliquer un théorème relevant de cette notion, il faut bien décortiquer les conditions d'application par une analyse de la place de chaque condition dans la preuve de ce dernier en essayant de discuter les questions suivantes :

- Est-elle nécessaire ?
- Est-elle suffisante pour la validité du théorème ?
- Peut-on étendre le théorème? Et dans quel sens ?

Une bonne technicité s'aquiert par un entraînement régulier et par une habitude de développer des contrôles de la validité des calculs (*exemple : l'intégrale d'une fonction positive est un nombre positif...*). Il va de soi que la mémorisation des éléments (définitions, formules) de base est nécessaire. Néanmoins un entraînement méthodique permet de développer des capacités à retrouver certaines formules quand la mémoire fait défaut.

La lisibilité, la correction et la rigueur des réponses sont, bien entendu, les critères principaux d'évaluation de la copie. Une écriture difficilement lisible, le verbiage pompeux et vide, des paraphrases de questions, finissent par avoir une incidence sur l'évaluation, et cela, quelle que soit la précision du barème appliqué.

Beaucoup de candidats ont présenté cette année leurs réponses de façon claire, avec rigueur scientifique et honnêteté intellectuelle. Leurs copies ont été appréciées et ont eu une note méritante.

En ce qui concerne les années à venir, le jury recommande aux futurs candidats de lire attentivement et régulièrement, le long de l'année en classes préparatoires, les différents rapports pour comprendre et construire progressivement les compétences attendues.