Thème

Ce sujet proposait un exercice élémentaire de calcul différentiel et un exercice dont le but était de démontrer que l'image d'une partie compacte par une application continue est encore une partie compacte.

Ensuite, un problème permettait de découvrir le phénomène de Gibbs et ensuite de démontrer le théorème de convergence normale sur les séries de Fourier.

Observations générales

Le texte était clair et précis et assez court. Toutefois on peut noter que les deux exercices, bien qu'assez élémentaires, ont été très mal ou très peu traités. Il semble que certains candidats ont choisi de faire des impasses en particulier sur le chapitre du calcul différentiel. On notera également que beaucoup de questions étaient proches du cours ou extraites de démonstrations de théorèmes.

La structure des sujets qui peuvent proposer un ou deux exercices en plus d'un problème permet aux concepteurs de mieux balayer l'ensemble du programme, aucun chapitre ne doit être oublié.

Le fil directeur est de proposer des sujets qui récompensent les candidats qui auront travaillé leur cours et refait des exercices dits « classiques ». On souhaite que les sujets permettent d'obtenir une moyenne brute au dessus de 10/20, afin de pouvoir mieux tenir compte de la rigueur et pour certaines questions n'attribuer les points que si la réponse est parfaite.

Ainsi un candidat de niveau moyen et qui a travaillé doit pouvoir obtenir la moyenne au moins.

Il était demandé d'utiliser la calculatrice afin de tracer des courbes de sommes partielles de séries de Fourier. Là encore, de nombreux candidats ont préféré passer sur cette question. C'est bien dommage, les questions demandant l'utilisation de cet outil moderne, peuvent rapporter des points plutôt facilement.

La tenue des copies est en général correcte. Cette année les correcteurs étaient invités à porter une attention toute particulière au soin et à la présentation. Par exemple, une copie dont les résultats sont soulignés ou encadrés est plus agréable. Malheureusement il existe quelques copies peu lisibles qui sont corrigées aux risques et périls du candidat. On ne peut qu'insister une nouvelle fois sur le soin que le futur ingénieur doit apporter à son travail.

Suite aux deux exercices de moyenne faible, la moyenne brute de ce sujet reste en dessous de l'objectif de 10. Toutefois c'est un sujet qui a permis de bien trier les candidats, l'écart-type est important.

En conclusion
L'attention des candidats est attirée par le fait que désormais les textes des sujets de mathématiques nécessitent une connaissance très précise des points fondamentaux du cours.

Sont ainsi valorisés :

- L'apprentissage du cours et en particulier les démonstrations des points importants, les exercices et exemples de base.
- Les qualités de rigueur et de clarté d'exposition que l'on peut attendre d'un futur ingénieur.
- L'aptitude à savoir manipuler sa calculatrice.
- Le soin apporté à la présentation de son travail.

Remarques détaillées par question

Exercice 1

1. Il ne servait à rien de calculer les dérivées partielles en dehors du point (0, 0), la notion de dérivée partielle en un point est mal comprise.

2. Question très peu traitée. Certains pensent, par exemple, à démontrer que la fonction est de classe C^1 mais peu le démontrent correctement.

Exercice 2

1. Trop d'élèves ont oublié de préciser que la limite de la suite extraite doit appartenir à la partie. Beaucoup de confusions entre parties complètes, parties fermées et parties compactes.
Pour quelques candidats un compact est, par définition, une partie fermée et bornée.

2. Question assez bien traitée par les candidats qui connaissaient la définition d'une partie compacte. Toutefois pour la deuxième partie de la question il suffit de donner un contre-exemple ce qui n'est pas compris par certains candidats. On rencontre quelques confusions entre f^{-1} (image réciproque) et f^{-1} (bijection réciproque).

Problème

1. (a) Un nombre non négligeable de candidats oublient de commencer par préciser que la fonction est continue sur $]0,\pi]$. On rencontre parfois l'erreur : $t \mapsto \frac{1}{t}$ intégrable sur $]0,\pi]$! Ou encore que la fonction est intégrable « en 0 » !

(b) Beaucoup parlent de séries entières sans jamais parler de rayon ou de préciser pour quelles valeurs de x la formule est valable.
La permutation des symboles $\sum$ et $\int$ pouvait s'expliquer simplement par le fait qu'une série entière converge uniformément sur tout compact inclus dans le disque de convergence (et non pas converge uniformément sur tout le disque).

2. (a) La notion de « croissance comparée » pour la limite de la suite $\left(\frac{\pi^n}{n!}\right)$ n'est pas acceptée.

(b) Trop peu de candidats ont compris qu'il fallait majorer le reste d'une série vérifiant le critère spécial des séries alternées. Pour cela il était attendu de vérifier les hypothèses de ce théorème. L'application numérique est assez mal traitée. On rencontre même des réponses du type : $I \sim 1.17325$ à 10^{-2} près !

3. Le calcul des coefficients de Fourier est bien réussi mais les théorèmes de convergences des séries de Fourier sont souvent incorrects. Pour le théorème de Dirichlet on attend l'hypothèse de classe C^1 par morceaux. Certains candidats répondent que la convergence est uniforme, mais alors la fonction f devrait être continue comme limite uniforme d'une série de fonctions continue !

4. Question assez peu traitée. C'est étonnant, il suffisait de reproduire une courbe à l'aide de la calculatrice. Ce genre de question rapporte des points facilement. En général tout usage de la calculatrice est à encourager.

5. **(a)** Assez bonne réussite de cette question, soit par exponentielle soit par récurrence.
(b) L'erreur la plus fréquente est celle qui consiste à majorer par un argument de continuité sur un compact mais alors la constante M dépend de n.
(c) Question difficile et assez peu réussie. Toutefois on pouvait admettre l'inégalité pour en déduire que la série de Fourier de f convergeait uniformément sur tout compact de l'intervalle.

6. **(a)** La somme S_n est une somme finie et par conséquent il était inutile d'utiliser le théorème de dérivation terme à terme pour calculer S_n'.
(b) Le premier résultat est trop rapidement trouvé, on oublie l'explication de la borne 0.
(c) Très peu d'élèves ont pensé à utiliser ici le théorème de convergence dominée.

7. Question très peu traitée.

8. Le théorème de Parseval avec les coefficients complexes est mal connu. Par contre pour la nullité de la fonction l'argument de continuité est en général bien exploité.

9. On rencontre l'erreur : « f est continue donc $c_n(f)$ est continue ».

10. **(a)** Question bien traitée.
(b) Il fallait penser à utiliser ici que $|ab| \leq \dfrac{a^2+b^2}{2}$.
(c) L'utilisation de Parseval pour la fonction f' est rarement bien argumentée.

La moyenne est de **9,70** l'écart-type est de **4,03**.