1.2 E - MATHEMATIQUES II - filière PC

I) <u>REMARQUES GENERALES</u>

Le problème portait sur le calcul de la valeur d'une intégrale généralisée dépendant d'un paramètre x et utilisait une partie du programme d'analyse :

- intégrales généralisées et dépendant d'un paramètre ;
- problèmes d'interversion de $\lim$, $\sum$ et $\int$;
- convergence normale ;
- développements de fonctions en séries entières ;
- rayon de convergence ;
- nombres complexes et fonctions d'une variable complexe.

L'épreuve a permis de bien départager les candidats. Il y a eu de très bonnes copies qui ont traité le sujet dans son intégralité. Toute l'échelle de notation a été représentée.

II) <u>REMARQUES PARTICULIERES</u>

On donnera le détail question par question.

1. La question a été plutôt bien traitée par les candidats. La plupart a remarqué que le problème résidait en 0. Néanmoins, un certain nombre de candidats ont juste majoré cette intégrale par une intégrale convergente (au lieu de la traiter par équivalence avec des intégrales de Riemann) ce qui permettait d'obtenir la condition suffisante pour la convergence mais ne suffisait pas à prouver que cette condition était également nécessaire.

2. Cette question facile a suscité beaucoup de difficultés. Il fallait prouver que l'hypothèse $y \in]0,1[$ était *suffisante* pour la convergence de cette intégrale généralisée.

Au lieu de remarquer tout simplement que grâce à cette hypothèse, la fonction $v \to v^{x-1} f(yv)$ est continue sur $]0,1]$ d'où l'absence de problème en 1 et ensuite équivalente à une intégrale Riemann intégrable en 0, beaucoup de candidats se sont mis à développer f en série entière, à permuter les signes de $\int$ et $\sum$ et aboutir à la valeur de l'intégrale en terme de a_n, en anticipant sur la question 4.

Cette démarche superflue n'a été recompensée que lorsqu'elle a été faite correctement avec justification précise de toutes les étapes. Dans un certain nombre de copies, il est dit que l'hypothèse $y \in]0,1[$ est *nécessaire* : "comme f est développable en série entière sur $[0,1[$ il faut que $y < 1$," ce qui n'explique pas pourquoi l'intégrale est convergente en 1.

Une autre manière de prouver l'absence de problème en 1 était de faire un changement de variable $t = vy$ et d'obtenir une intégrale avec la borne supérieure $y < 1$, démarche que pratiquement aucun candidat n'a suivie.

3. Il fallait prouver que la fonction est continue sur $[0,1[$. Bien entendu, le calcul $\int_0^1 v^{x-1} f(0)dx = f(0)/x$ ne prouve en aucun cas la continuité en 0. Beaucoup de candidats ont su se ramener à considérer la continuité en un point $y_0 \in [0,1[$. Il fallait permuter les limites $\lim_{y_n \to y_0} \int_0^1 v^{x-1} f(y_n v)dv = \int_0^1 \lim_{y_n \to y_0} v^{x-1} f(y_n v)dv$. Mais pour vérifier les hypothèses du théorème adéquat les erreurs ont été nombreuses : dans une partie des copies il est admis que $\sup_{x\in[0,1[} f(x)$ est fini, ce qui n'est pas obligatoirement le cas pour une fonction développable en série entière sur $[0,1[$.

Dans une autre partie, les candidats savent qu'il faut vérifier l'hypothèse de domination locale, c'est à dire qu'ils prennent un intervalle $[a,b] \in [0,1[$ contenant y_0 mais écrivent une inégalité généralement fausse $\sup_{v\in[0,1[,\, y\in[a,b]} | f(yv) | \le \sup_{v\in[0,1[} | f(bv) |$. Les rares candidats qui ont remarqué que

Téléchargé gratuitement sur Doc-Solus.fr

$\sup_{v\in[0,1[,\, y\in[a,b]} | f(yv) | \le \sup_{t\in[0,b]} | f(t) | < \infty$ car f est continue sur $[0,b]$ ont été recompensés pour cette question.

Une façon différente de prouver la continuité pour $y \in]0,1[$ consistait à effectuer le changement de variable $t = yv$ et à faire référence à la continuité de y^{-x} et d'une intégrale dependant de sa borne supérieure y. Les candidats qui l'ont choisie sont rarissimes.

4. Cette question pose un problème de permutation de $\sum$ et de $\int$. Les candidats qui ont fait cette permutation sans justification *correcte* et ont abouti formellement à la bonne réponse mais ont été très peu recompensés par rapport à ceux qui ont bien justifié ce passage.

"Bien justifier", ce n'est ni citer le théorème d'intégration terme à terme sans vérifier ses hypothèses, ni évoquer vaguement la convergence normale. Seuls les arguments justes et précis sont pris en compte !

Le correcteur cherchait à ce que le candidat observe la convergence normale de la série $\sum_{n\ge1} f_n(v)$ sur $[0,1]$ avec $f_n(v) = a_n y^n v^{n+x-1}$ en l'estimant par une série convergente et indépendante de v : $\sum_{n\ge1} | f_n(v) | \le \sum_{n\ge1} | a_n | y_n$.

Mais nombreux sont ceux qui ont mentionné la convergence normale sans même écrire sur quelle intérvale elle est affirmée.

D'autres ont insisté sur la convergence normale de la série $\sum_{n\ge1} | a_n | y_n$ qui n'est pas nécessaire et n'a pas lieu généralement sur $[0,1[$. Un bon nombre de candidats a pris la série $\sum_{n\ge1} f_n(v)$ pour la série entière de la variable v. Dans l'estimation $\sum_{n\ge1} \int | a_n y^n v^{n+x-1} | dv \le \sum_{n\ge1} \int_0^1 | a_n | y^n dv \le \sum_{n\ge1} | a_n | y_n$ nombreux sont ceux qui ont supposé $a_n > 0$ sans raison.

5. Cette question calculatoire a été traitée correctement par la majorité des candidats, le correcteur cherchait la réponse sous la forme finale $(n+x)^{-1}$, ce qui était obtenu en utilisant l'égalité $\sin(\pi n + \pi x) = (-1)^n \sin(\pi x)$.

6. C'est encore une question où les candidats ne sachant pas appliquer le théorème d'intégration terme à terme ont été penalisés.

La faute la plus repandue a été d'écrire que la série $\sum_{n\ge0} a_n (-y)^n \exp(i\pi(n+x)t)$ est entière et de citer le théorème d'intégration d'une série entière. Mais cette série n'est pas entière de l'argument t et l'intégration se faisait par cet argument et non par y.

7. Une grande partie de candidats a réussi à établir cette identité. Les arguments malhonnêtes consistant à écrire deux pages de calcul ne menant à rien conclues par "et donc on a cqfd" étaient facilement détectables.

8. La question a été traitée correctement par la majorité des candidats. Néanmoins, il est triste de remarquer que pour calculer la partie réelle d'un quotient de deux nombres complexes, il existe quelques candidats (pas si rare) qui mettent au carré le dénominateur au lieu de le multiplier par le conjugué !

9. La question a été correctement faite par une bonne partie des candidats. Il a fallu développer en série entière la fonction $(1-x)^{-1}$, puis savoir prendre la partie réelle d'un nombre complexe. Certains n'ont pas su réarranger les termes à la fin. Le premier terme de developpement (égal à 1) a suscité parfois une erreur.

10. C'est encore une question où la justification de l'interversion de $\sum$ et $\int$ a été nécessaire pour gagner le total de points du barême.

Comme dans la question 6, voici la faute la plus typique : la série $\sum_{n\ge1} y^n \cos(\pi nt)$, étant entière de y, n'est pas entière de la variable d'intégration t, donc les arguments d'intégration de séries entières ne pouvaient pas être pris en compte.

Téléchargé gratuitement sur Doc-Solus.fr

11. Extrêmement peu de candidats ont réussi à traiter cette question correctement. Néanmoins, beaucoup ont remarqué que dans la première partie il fallait en effet justifier l'interversion de signes de $\lim$ et $\int$:

$$\lim_{y\to 1} \int_{\alpha}^{1} P(t,y)\phi(t)dt = \int_{\alpha}^{1} \lim_{y\to 1} P(t,y)\phi(t)dt .$$

Pour cela, en utilisant le théorème adéquat, plusieurs candidats se sont ramenés à démontrer que pour un $\varepsilon > 0$ $\sup_{y\in[1-\varepsilon,1],t\in[\alpha,1]} |P(t,y)|$ est fini. Cette démonstration n'a pratiquement jamais été faite. Quelques candidats ont juste évoqué l'importance de prendre $t\in[\alpha,1]$ et non $t\in[0,1]$ car $\lim_{y\to 1} P(0,y) = \infty$. Une (mais pas la seule) manière de mener à bien le raisonnement était de remarquer que $P(t,y)$ est positive et décroissante de l'argument t. Alors, le supremum ci-dessus n'excède pas $\sup_{y\in[1-\varepsilon,1]} P(\alpha,y)$.

Dans la deuxième partie de la question, il a fallu estimer la valeur absolue d'une intégrale. Beaucoup de candidats n'ont pas remarqué la positivté de $P(t,y)$. Il est étonnant que parmi ceux qui l'ont remarqué, nombreux sont ceux qui n'ont pas su mener à bien cet enchaînement d'estimations court et facile !

12. Très peu de candidats ont su mener la démonstration dans le cas de la fonction $(\phi(t)-\phi(0))$. Beaucoup ont cité les inégalités de la question précédente mais n'ont pas su s'en servir dans le bon ordre. Or, seul le raisonnement correct et précis a été recompensé. Néanmoins, certains candidats ont déduit la démonstration dans le cas $\phi(t)$ du cas précédent ce qui leur a permis d'accumuler un peu de points sur cette question.

13. Cette question très facile, qui découle de la lecture du sujet, a été traitée dans une majorité de copies.

14. Cette question facile qui découle de la précédente et du fait que $\cos 0 = 1$ a été traitée dans beaucoup de copies.

15. Et voila, à la fin du sujet encore une interversion de signes de $\lim$ et $\int$: il a fallu dominer $|(u^{x-1}+u^{-x})g(yu)|$ par une fonction uniquement de l'argument u dont l'intégrale sur $[0,1]$ est convergente. Ceux, très nombreux, qui ne l'ont pas fait, ont encore perdu des points. Une bonne partie des candidats ayant fait les questions 13 et 14 a su juste faire le calcul formel et obtenir la réponse finale $\pi/\sin(\pi x)$.

III) <u>CONSEILS AUX CANDIDATS ET CONCLUSION</u>

Les problèmes de permutation de symboles $\sum$ et $\int$; $\sum$ et $\lim$; $\int$ et $\lim$;
se rencontrent dans presque tous les énoncés de sujets de mathématiques.

Les candidats maîtrisant bien les outils principaux pour aborder ces problèmes comme la convergence normale et uniforme sont généreusement recompensés par le barême. Les candidats essayant de tricher à ce sujet, (écrivant tous simplement "par un théorème du cours", ou énoncant un théorème sans vérifier ses hypothèses dans le cadre du sujet, ou encore faisant des majorations inutiles ou imprécises) sont toujours très pénalisés et souvent éliminés. Il est vivement conseillé aux candidats de bien assimiler ce morceau de programme, car il est extrêmement important pour réussir l'epreuve de mathématiques.

Il est toujours plus valorisant de faire "bien" moins de questions que d'essayer de grapiller des points partout. Faire "bien" n'est pas du tout synonime d'écrire beaucoup : la longueur de la rédaction ne rajoute pas de points. Le correcteur cherche des arguments clés, formulés de manière précise et concise. Pour cela, souvent quelques lignes suffisent. Les meilleurs copies sont brèves.

Si vous ne connaissez pas la réponse, il vaut mieux ne rien écrire et admettre le résultat pour la suite que de perdre du temps à divaguer. Les élucubrations du type : "procédons par analyse-synthèse": analyse (suivi d'un barratin), synthèse (encore un barratin), bilan (et donc, on a ce qu'il fallait démontrer) indisposent fortement le correcteur.

Téléchargé gratuitement sur Doc-Solus.fr