B. Cette question a été très souvent sautée : même ceux qui ont trouvé de bonnes valeurs pour N en II.B.1 ou II.B.2 ne calculent pas la valeur de dzeta en 3.

Partie III

A.1 Seulement un tiers des candidats a traité cette question : certains se sont acharnés à vouloir appliquer la règle de D'Alembert, d'autres ont fait des erreurs dans le calcul du terme général de la série, enfin les développements limités, lorsque le candidat pense à les utiliser, sont parfois faux.

A.2 Le lien entre suite et série, à cause du caractère télescopique de la somme de la série, est vu dans un tiers des copies mais pas toujours exploité. La plupart utilise le fait que le terme général de la série convergente tend vers 0 et croit pouvoir en déduire que la suite des w a une limite quand n tend vers l'infini. De plus, il ne suffit pas qu'une suite convergente ait tous ses termes positifs pour que la limite soit positive.

B. Là encore, la règle de D'Alembert est utilisée à tort, étant prise comme condition nécessaire et suffisante de convergence.

C.1 Il y a très souvent confusion entre convergence absolue et convergence normale. La convergence normale de la série sur tout compact de]0, + oo[n'est pas la convergence normale sur]0, +oo[.

C.2 Le théorème de la double limite est souvent connu mais beaucoup de candidats ne voient pas que la convergence normale de la série sur tout compact de]0, + oo[n'est pas suffisante pour conclure.

D. Les exemples sont souvent donnés sans aucune justification.

E.1 La justification de la dérivabilité du terme général de la série est souvent mal faite. La phrase « d'après les théorèmes généraux, la fonction est dérivable » ne suffit pas.

E.2 La majoration nécessaire pour montrer la convergence normale n'a été que très rarement faite. Par contre, le théorème est très souvent correctement cité.

Partie IV

A.1 Les polynômes sont très souvent déclarés échelonnés alors qu'il est clair qu'ils sont tous de degré n.

A.2 Il y a souvent confusion entre polynôme et fraction rationnelle.

B. Beaucoup d'erreurs dans le calcul de l'intégrale. Le fait de trouver un résultat négatif en intégrant une fonction positive sur [0, 1] ne semble pas gênant pour certains.

C. L'hypothèse de récurrence, lorsque cette méthode est utilisée, est souvent mal formulée.

D.1 Là encore, la règle de D'Alembert est invoquée à tort.

D.2 La permutation somme intégrale n'est en général pas justifiée correctement.

Partie V

A.1 La question portant sur la dérivation d'une intégrale dépendant d'un paramètre a rarement été traitée correctement : pour certains, c'est une évidence ; pour d'autres, cela donne lieu à un flot d'hypothèses hétéroclites qu'ils cherchent en vain à justifier ; enfin certains citent correctement le théorème mais sont incapables de vérifier les hypothèses.

A.2 Le produit de Cauchy a beaucoup de succès et l'écriture du terme général du produit est en général correct.

Les questions suivantes ont été très rarement abordées.

Conclusion

Ce problème nous a semblé bien adapté à une classe de PC, d'une longueur raisonnable et a permis de bien classer les candidats. Ceux qui connaissaient bien leur cours ont été récompensés car certaines questions étaient des applications directes. La notion de convergence normale qui intervient beaucoup dans ce problème est souvent mal maitrisée et est souvent confondue avec la convergence absolue. La manipulation d'équivalents donne aussi lieu à de nombreuses erreurs. De plus, les étudiants ne doivent pas négliger les questions plus techniques ou plus calculatoires qui peuvent aussi rapporter des points.

Mathématiques II

Présentation du sujet

Le sujet de cette année proposait des méthodes de résolutions d'une équation linéaire

$$Ax = b$$

par itération. De nombreuses méthodes (à la suite de la décomposition de Cholesky) traitent le cas de matrices symétriques A.

Dans le cas d'une matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ symétrique réelle définie positive, la fonction numérique

$$J : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}\,,\, v \mapsto J(v) = \frac{1}{2}{}^t vAv - {}^t bv$$

tend uniformément vers $+\infty$ quand $\| v \|$ tend vers ∞, et admet donc un minimum absolu. Par ailleurs la différentielle de J en v_0 est la forme linéaire sur $\mathbb{R}^n$

$$h \mapsto {}^t(Av_0 - b)h$$

qui est nulle si et seulement si $Av_0 = b$. L'équation linéaire de départ se résume donc à la détermination du minimum de la fonction j. D'où certaines méthodes itératives présentées par l'énoncé. Les justifications employées recourent essentiellement à l'analyse du spectre de l'endomorphisme associé à A.

Analyse globale des résultats

Peu de copies dénotent une carence générale sur cette partie du programme. Les résultats et méthodes d'algèbre linéaire paraissent familiers même s'ils ne sont pas toujours parfaitement maîtrisés en dehors de leurs applications les plus classiques. De plus ce ne sont paradoxalement pas les parties calculatoires (I.B ou III.B) qui ont contribué à repêcher les candidats : on relève beaucoup d'erreurs de calculs. Or, si les calculateurs électroniques rendent des services inestimables aux mathématiciens, il est clair que des calculs aussi brefs que ceux demandés par l'énoncé doivent être réussis à la main.

Commentaires sur les réponses apportées et conseils aux candidats

I.A Beaucoup de candidats ont vu l'implication correspondant au « seulement si ». En revanche bien moins nombreux ont été ceux qui ont su argumenter correctement la réciproque en écrivant $\langle Mx, x\rangle = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2$ où les x_i sont les coordonnées de x dans une base orthonormée et les λ_i décrivent les éléments de $\sigma(M)$ avec leurs multiplicités.

I.B.d Cette question devrait être facile mais la détermination des quadriques pose encore quelques difficultés aux candidats et, une fois celle-ci faite, la nomenclature est parfois mal connue (beaucoup de « cylindres »).

I.C.3.b On voit beaucoup de « divisions » par d (écrites d^{-1}). Les étudiants qui craignent de confondre scalaires et vecteurs peuvent si nécessaire adjoindre une flèche au-dessus des dits vecteurs.

I.C.4 La question demande le même type d'analyse qu'en I.A.1. Il est arrivé que des candidats fassent ici un raisonnement complet alors qu'ils n'avaient pas montré le sens direct en I.A.1. En pareil cas, on ne peut que leur conseiller de compléter alors la question qu'ils avaient laissée inachevée.

II.A.1 La plupart des copies montre seulement l'inégalité $N_\infty(M) \leq \ldots$. Parmi celles qui tentent de montrer que le max a bien la valeur annoncée, on rencontre fréquemment l'erreur selon laquelle il la prendrait au vecteur colonne dont toutes les coordonnées valent 1. Remarquons au passage qu'il est impossible que la formule $N(M) = \| Mx_0 \|$ (pour x_0 un vecteur fixe et $\| \ \|$ une norme) définisse une norme N sur $M_n(\mathbb{C})$ (séparabilité).

II.A.2.a Ici beaucoup de candidats supposent que N est la norme N_∞ de la question précédente. Notons que cela n'apporte d'ailleurs aucune simplification.

II.A.5 Un très petit nombre de candidats a abordé cette question, pourtant fort intéressante. Relier la norme et le spectre d'une application linéaire est une question fondamentale. Signalons le théorème du rayon spectral qui affirme que $\rho(M) = \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{N(M^k)}$ indépendamment de la norme, assertion encore pertinente en dimension infinie.

En dimension finie, la décomposition de Jordan permettrait de calculer facilement les puissances M^k et de montrer l'implication $\rho(M) < 1 \Rightarrow \lim_{k\to\infty} M^k = 0$. Signalons aussi que pour une matrice symétrique M, le rayon spectral $\rho(M)$ coïncide toujours avec $N(M)$ pour N la norme subordonnée au produit scalaire $\langle , \rangle$ sur $\mathbb{C}^n$ (voir la question I.C.4). La voie suivie par l'énoncé consistait à utiliser la trigonalisation pour construire une norme ad hoc pour la matrice M considérée.

II.B.1 Cette question a été convenablement traitée en général. Notons que $S^{-1}A$ est clairement un endomorphisme auto-adjoint pour le produit scalaire ϕ, ce qui pouvait contribuer à éclairer quelque peu les questions suivantes qui reprennent les considérations classiques pour la réduction des matrices symétriques.

II.B.2 L'orthogonalité a souvent fait l'objet de raisonnements inutilement compliqués. Pour en déduire que les espaces étaient supplémentaires, on pouvait analyser les dimensions en notant que $\mathrm{Ker}(A) = \mathrm{Ker}(S^{-1}A)$ ou que $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(S^{-1}A)$, ce que beaucoup de candidats ont su faire.

II.B.3 Là aussi, un bon nombre de candidats a su voir l'argument permettant de résoudre la question (proche de la notion de factorisation d'une application linéaire).

II.B.4.e Peu de justifications complètes dans les rares copies qui ont abordé cette question.

III.A Bien peu de copies abordent cette partie de l'énoncé. Ce III.A demandait surtout une bonne connaissance de ce qui avait été vu auparavant en I. Concernant la question de la convergence de u_k vers v_0 (III.A.5), on notera qu'il est possible d'utiliser seulement que d_k tend vers 0 puisqu'alors, en prenant l'image par A^{-1}, on en déduit que u_k tend vers $A^{-1}b = v_0$.

III.B Les rares copies où cette question est abordée sont le fait de candidats ayant échoué dans les parties précédentes. Mais celle-ci n'était guère plus facile, les calculs débouchant sur des fractions rationnelles peu simplifiables.

Conclusion

Les meilleures copies proviennent de candidats qui possédaient une bonne culture en algèbre linéaire, mais qui ont aussi su faire un effort pour comprendre les finalités et les méthodes de l'énoncé. En effet celles-ci étaient souvent proches d'une partie à l'autre. De plus certaines méthodes étaient assez voisines de celles utilisées dans le cours d'algèbre en classes préparatoires.

Sciences physiques

Physique I

Présentation du sujet

Le problème de cette année abordait différentes parties du programme de première et deuxième année (diffusion thermique, électrocinétique, électronique, ondes), par une étude des ondes thermiques.

La finalité de l'étude (partie IV) était le principe de l'interférométrie multiple d'ondes thermiques (TWI : thermal waves interferometry), technique permettant la mesure du coefficient de diffusion thermique D d'un gaz.

Le début du problème était constitué de :

- Partie I : diffusion thermique en régime stationnaire, puis en régime sinusoïdal forcé ;
- Partie II : étude expérimentale de l'équation de diffusion à partir d'un modèle électrocinétique ;
- Partie III : étude d'un capteur de flux lumineux modulé, basé sur l'effet pyroélectrique.

Dans la partie IV, c'est ce détecteur très sensible qui recevra l'onde thermique, après traversée du gaz à étudier.

Les quatre parties étaient largement indépendantes, cependant les parties I et III préparaient la partie IV, alors que la partie II était une étude annexe.

Les aspects expérimentaux occupaient une large place dans le problème, en accord avec l'esprit de la filière PC. Une alternance de questions de cours, de questions en lien avec les TP et de questions plus difficiles ont permis un étalement des notes tout à fait satisfaisant pour cette épreuve.

Il était nécessaire d'avoir de bonnes connaissances, et de savoir les adapter pour mener à bien cette étude originale, cela nécessitait des qualités de réflexion et d'adaptation, qualités essentielles au métier d'ingénieur.

Analyse globale des résultats

En moyenne, 57 % des points des candidats ont été obtenus dans la partie I, qui représentait 32 % des points du barème.

14 % ont été obtenus dans la partie II (18 % des points du barème).

16 % ont été obtenus dans la partie III (25 % des points du barème).

13 % ont été obtenus dans la partie IV (25 % des points du barème).

Les candidats ont donc passé beaucoup de temps sur la partie I, et la fin de la partie IV n'a pratiquement pas été abordée, l'épreuve étant relativement longue.

Commentaires sur les réponses apportées et conseils aux candidats

Graphes

Un problème à l'impression du sujet (traits fins non imprimés sur les figures 2 et 6) rendait les lectures graphiques plus délicates, surtout pour la figure 6 où l'échelle logarithmique à l'intérieur d'une décade (horizontale ou verticale) était absente. Le jury en a tenu compte en acceptant pour les applications numériques associées une gamme de valeurs plus étendue.

Partie I - Étude de la diffusion thermique

- I.A.1. : il ne s'agit pas de redonner les noms qui figurent dans l'énoncé : seulement 16 % de bonnes réponses pour la signification de j_Q. De nombreuses confusions entre la dimension d'une grandeur et l'unité avec laquelle on la mesure.

  Les candidats devraient réfléchir à tous les phénomènes de transport rencontrés dans le cadre du programme, et à la signification physique du vecteur densité de courant associé.
- I.A.3. : 44 % de réponses correctes seulement. Une affirmation péremptoire telle que : « le régime est stationnaire, donc j_Q est uniforme » ne constitue pas une démonstration. Les arguments : pas de travail, pas de sources, surface constante sont rarement