1.2 D - MATHEMATIQUES II - filière MP

I) <u>REMARQUES GENERALES</u>

Le but du problème était la démonstration du théorème de Müntz qui relie la divergence de la série $\frac{1}{\lambda_n}$ à l'approximation en norme uniforme et en moyenne quadratique d'une fonction continue sur $[0,1]$ par des combinaisons linéaires des fonctions $x \rightsquigarrow x^{\lambda_n}$.

Le sujet mettait en jeu des connaissances en algèbre linéaire et multilinéaire (familles libres, déterminants), en géométrie euclidienne (projection orthogonale sur un sous-espace vectoriel de dimension finie), et en analyse (distance d'un point à une partie dans un espace vectoriel normé, comparaison de normes, densité d'un sous-espace dans $\mathcal{C}([0,1])$, étude de séries numériques).

Les notions de topologie, intervenant constamment dans le problème, ont semblé décontenancer bon nombre de candidats qui n'ont pas toujours réussi à retrouver un équilibre sur des questions pourtant plus faciles.

La large indépendance des questions a favorisé un bon étalement des notes. Plusieurs d'entre elles relevaient directement du cours (4-6-7-8-9-11-14-15) et ont permis à des candidats sérieux d'obtenir une note honorable.

Les dessins (bienvenus en géométrie euclidienne) - sans se substituer à une démonstration -, ont été appréciés et ont probablement aidé les candidats dans leur démarche.

Les résultats de cette épreuve sont très décevants. Ils révèlent une profonde méconnaissance de résultats fondamentaux, tels que le théorème de Pythagore ou le fait qu'une boule ne soit pas un sous-espace vectoriel...Les correcteurs se sont trouvés confrontés à des discours parfois surréalistes sur la topologie des espaces vectoriels normés que, même une aversion du sujet, ne suffit pas à justifier.

II) <u>REMARQUES PARTICULIERES</u>

<u>Question 1</u> : Il importe de rappeler que, par définition, une famille infinie de vecteurs est libre si toute sous-famille *finie* de cette famille est libre. Les candidats qui partaient d'une série, ou d'une vague relation $\sum a_\lambda x^\lambda = 0,$ non seulement ne respectaient pas la définition du cours, mais introduisaient de plus le problème de l'existence de la somme écrite. Il s'agissait ensuite de bien comprendre que les x^λ considérés ne forment pas une famille de polynômes de degrés échelonnés.

Outre les démonstrations classiques (équivalents ou limites, en prenant garde à ne pas se placer au voisinage de l'infini, puisqu'il s'agissait de fonctions définies sur $[0,1]$), certains candidats ont proposé avec succès une méthode faisant intervenir les valeurs propres de l'endomorphisme $f \rightsquigarrow xf'$.

Il est à noter, pour cette question ou les suivantes, des erreurs graves concernant la rédaction d'un raisonnement par récurrence.

<u>Question 2</u> : Assez bien traitée dans l'ensemble. Il manquait dans l'énoncé l'hypothèse "$a_i \neq -b_j$", ce que certains candidats ont signalé. D'autres ont toutefois divisé par A_n, voire par tous les A_i, sans se préoccuper de la nullité éventuelle de ces coefficients.

<u>Question 3</u> : Sans le calcul des A_n, on ne pouvait pas parvenir au résultat demandé. Le cas où les b_i ne sont pas tous distincts a été éludé et la récurrence souvent hâtive. Heureusement que l'énoncé donnait le résultat...

Question 4 : Il s'agissait d'une question typique de compréhension du cours. Trop de candidats considèrent encore qu'un point adhérent à un ensemble appartient à cet ensemble.

Question 5 : Quelques belles démonstrations directes du fait que $\lim\ d(x, A_n) = d(x, A)$ ont été proposées ; sinon, l'argumentation par étapes (suite décroissante minorée) n'a été correctement maîtrisée que par trop peu de copies.

Des manipulations hasardeuses avec les inégalités sur les distances du genre $d(x, y) \leq d(x, A) + d(A, y)$ ont laissé rêveur...

Questions 6 - 7 : Les liens entre compacité, fermeture et dimension finie ne sont pas bien appréhendés par les candidats. Il est à déplorer trop de phrases du genre : "V est compact car de dimension finie" ; "$B \cap V$ est un fermé borné de dimension finie", etc.

La continuité de la norme a rarement été mise en évidence pour l'obtention du minimum.

L'emploi du résultat de la question 7 pour résoudre plus rapidement la question 6 était possible, mais nullement obligatoire.

Question 8 : Il ne pouvait suffire de paraphraser la question en invoquant le cours. Le théorème de Pythagore (outre l'orthographe douteuse) a été dans presque un cas sur deux écrit sans carrés ! Il a été exploité de manière non moins douteuse pour établir la caractérisation de la projection orthogonale. En particulier l'unicité de l'élément y de V réalisant $d(x,V) = \|x - y\|$ n'a pas souvent été démontrée.

Question 9 : Ne pas penser que $\langle x, y \rangle = 0$ entraîne $x = 0$ ou $y = 0,$ ni que la dépendance d'une famille de vecteurs se ramène à la colinéarité de deux d'entre eux...

Question 10 : Les calculs sont parfois escamotés ou arrangés en fonction du résultat donné par l'énoncé. Quelques copies adoptent avec bonheur la variante $\det({}^t MM) = (\det M)^2,$ ce qui leur permettait de gagner du temps.

Questions 11 - 14 : Quand elles ont été abordées, ces questions ont été assez correctement traitées, dessins à l'appui.

Dans la question 11) on ne pouvait pas utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz, qui est dans le sens opposé à celui souhaité. En outre, il convenait de donner un minimum de justifications du fait qu'un point adhérent à A pour N_∞ l'est également pour N_2.

Pour la question 12), les exemples ont été variés (pas toujours judicieux...). Attention à la confusion entre $N_2(f_n) \to N_2(\varphi_0)$ et $N_2(f_n - \varphi_0) \to 0$. Même avec un choix acceptable des f_n, le calcul de $N_2(f_n - \varphi_0)$ n'a pas toujours été juste !

Questions 15 - 16 : Les copies qui ont abordé ces questions ont fait appel au théorème de Weierstrass et ont correctement conclu. On pouvait dans la question 16 suivre le même schéma que dans la question 15 pour obtenir le résultat.

Questions 17 - 24 : Fin de problème...La plupart des candidats a abordé la question 19) avec des fortunes diverses (la dérivée de la fonction était de temps en temps fausse...).

Les points cruciaux concernant la divergence des séries, les équivalents, l'application de la formule de Cauchy-Schwarz en 22) ont largement dépassé la plupart des candidats qui, à part quelques excellentes copies, ont essayé in fine d'acquérir quelques points.

III) CONCLUSION

Cette épreuve s'est révélée particulièrement décevante. En admettant que la topologie ne soit pas le domaine de prédilection des candidats au concours, on pouvait au moins s'attendre à une connaissance minimale du cours sur des domaines aussi variés que le calcul d'un déterminant, l'utilisation d'une récurrence, le théorème de Pythagore, et des considérations élémentaires sur la liberté d'une famille de vecteurs.

En ce qui concerne la rédaction et la présentation, on ne saurait trop recommander aux candidats de veiller à l'orthographe et à la cohérence des phrases en français.

Il est inutile aussi de faire figurer des démonstrations qui n'aboutissent pas, de même que des calculs "arrangés" en sorte qu'ils conduisent au résultat fourni par l'énoncé.

Certaines copies honnêtes, claires et concises ont été particulièrement appréciées et ont reçu une note méritée.