EPREUVE DE MATHEMATIQUES B

Durée : 4 heures

Le jury constate tout d'abord un net accroissement du nombre de copies très mal rédigées, certaines étant de plus presque illisibles. Un tiers des copies est globalement satisfaisant et une centaine d'entre elles sont excellentes. Cependant le jury déplore vivement la présence d'un trop grand nombre (un tiers environ) de copies très faibles voire affligeantes.

COMMENTAIRES AU SUJET DES TROIS EXERCICES DE CETTE EPREUVE.

Exercice 1

Dans cet exercice, il s'agit d'établir que si :

n est un entier naturel non nul, $(\alpha_1,\alpha_2,.....,\alpha_n)$ un élément de $\mathbf{R}^n$ avec $\alpha_1 < \alpha_2 < ..... < \alpha_n$, $(\lambda_1,\lambda_2,.....,\lambda_n)$ un élément de $(\mathbf{R}^*)^n$ et f_n l'application de $]0,+\infty[$ vers $\mathbf{R}$ définie par :

$$f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k\, x^{\alpha_k} .$$

alors f_n s'annule au plus $n-1$ fois dans $]0,+\infty[$.

1° Un tiers des candidats cite le théorème de Rolle avec les hypothèses minimales et un autre tiers des candidats ignore tout de ce théorème.

2° Cette question est réussie par la moitié des candidats.

3° Une malencontreuse erreur de signe a été commise lors de la saisie des expressions de $a(x)$ et de $b(x)$, qui de ce fait ne s'annulent pas sur $]0,+\infty[$. Les rares candidats l'ayant remarqué ont évidemment fait le plein des points de cette question.

4° 5% des candidats, s'inspirant du raisonnement suggéré par l'énoncé de la question 3°, abordent de façon satisfaisante cette question .

5° On pouvait constater que $P(0)$ est différent de 0 et utiliser la question 4° pour conclure en considérant $P(x)$ et $P(-x)$; on pouvait aussi remarquer que P ne s'annule pas sur $[0,+\infty[$ et conclure avec la question 4° appliquée à $P(x)$.

Exercice 2

Partie A et Partie B

Il s'agit d'établir que pour toute matrice S de $S_n^+(\mathbf{R})$, on a $\det(S) \le \prod_{i=1}^{n} s_{ii}$, puis d'utiliser ce résultat pour établir l'inégalité d'Hadamard.

Les diverses questions de cette partie sont très classiques et présentées de manière très progressive.

Un tiers des candidats traite correctement ces parties.

Mais dans un autre tiers des copies, on relève une méconnaissance certaine du cours, des suites d'affirmations gratuites tenant lieu de preuve, un manque flagrant de rigueur, voire une absence totale de raisonnement.

Partie C

Dans cette partie on utilise l'inégalité d'Hadamard pour établir le résultat suivant :

Si f est une fonction de **R** vers **R** développable en série entière en 0 telle que $f(0) \neq 0$, alors la fonction $\frac{1}{f}$ définie au voisinage de 0 est développable en série entière en 0.

La question 1° est abordée par la plupart des candidats, mais la moitié d'entre eux ne connaît pas les formules de Cramer.

Les questions 3° et 4°, plus délicates, ne sont pratiquement jamais abordées et ne sont traitées correctement que dans quelques très bonnes copies.

Exercice 3

Dans cet exercice, on se propose d'étudier la fonction numérique F de la variable réelle x telle que : $F(x) = \int_0^{+\infty} e^{-x \operatorname{ch} t}\, dt$.

Les questions 1° , 2° et 3° sont traitées par la majorité des candidats. Si la question 1° est globalement bien faite, la question 2° réussie par la moitié des candidats, la question 3° est traitée de manière catastrophique.

Un quart seulement des candidats sait que la résolution de cette question nécessite l'établissement d' « hypothèses de domination », et dans ce cas la plupart des majorations proposées sont inexactes voire incompréhensibles. 5% des candidats seulement prouvent que F est de classe C^2 sur $]0,+\infty[$.

Cette question révèle que le cours concernant les fonctions du type $x \to \int_a^b f(x,t)\,dt$ n'est en général ni compris, ni même connu et qu'établir des majorations pertinentes et non suggérées est hors de portée de la majorité des candidats.

Un dixième des candidats utilise à bon escient une intégration par parties pour résoudre la question 4°.

Les questions 5° b) et c) sont plutôt bien faites.

Dans la question 6° on constate que la caractérisation séquentielle de l'existence d'une limite d'une fonction n'est pas connue et que l'application du théorème de convergence dominée appelle les mêmes remarques que celles faites à la question 3°.