

sont simples, est diagonalisable. Il convient d'éviter d'en faire un cas « préféré » de matrice diagonalisable, pour éviter l'idée qu'on aurait là une condition nécessaire (le cas de la matrice nulle doit servir de garde-fou).

De même, il existe des matrices triangulaires qui sont diagonalisables mais non diagonales, sur le modèle de

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

en dimension 2...

I.A.6 - Les correcteurs ont admis toute expression exacte. Noter toutefois que des formules simples du type $2^n - 2^{n-1} = 2^{n-1}$ pouvaient aider à simplifier le résultat.

Notons que les candidats pouvaient vérifier que leurs formules donnaient bien x_0 et x_1 pour $n = 0$ et 1. Peu semblent l'avoir fait.

I.B.2 - L'injectivité a (trop) souvent été testée sous la forme $\Phi(x) = \Phi(y) \implies x = y$. La surjectivité a plus rarement été abordée. Rappelons que le corollaire du théorème du rang qui affirme que l'injectivité implique la bijectivité quand les deux espaces vectoriels ont même dimension... n'est valable qu'en dimension finie. A contrario beaucoup de candidats ont bien vu que la corrélation entre les coordonnées de $\Phi(x)_{n+1}$ et de $\Phi(x)_n$ empêchait la surjectivité de Φ .

I.C.1 - On peut remarquer que dans cet exemple c'est la suite $(A^n)_n$ elle-même qui converge vers le projecteur sur l'espace propre de la valeur propre 1 parallèlement aux autres espaces propres.

I.C.2 - On notera que dans cet exemple la suite $(A^n)_n$ elle-même est périodique : $A^6 = I_3$, ce que l'on vérifie impérativement sur ses valeurs propres qui sont des puissances de $e^{\frac{2\pi i}{6}}$. On notera d'ailleurs que $P(x) = (X-1).Q(X)$ où Q est le sixième polynôme cyclotomique.

I.C.3.b - Ici, pour montrer que A n'est pas diagonalisable, la décomposition de Jordan (et son unicité) n'étant pas au programme, il fallait se ramener au cas de T et vérifier que $\ker(T - \mu I)$ est de dimension 1. Quelques candidats ont fait ce raisonnement de façon correcte.

I.C.3.c - Peu de candidats ont su trouver tous les cas demandés. Notons que la question est en fait équivalente à la question de la convergence de la suite de puissances $(A^n)_n$.

II.A - L'écriture

$$\prod_{i=0}^n A_i$$

est à proscrire lorsqu'on ne travaille pas dans un anneau commutatif... surtout si cette formule doit signifier en fait $A_n A_{n-1} \dots A_0$.

Beaucoup de candidats ont invoqué le théorème de Cauchy-Lipschitz sur les équations différentielles, peut-être abusés par le terme de « condition initiale » utilisé par l'énoncé. Le problème posé ici est de nature différente. Nous concluons en notant que c'est la théorie des suites linéaires récurrentes de la Partie 1 qui rappelle la théorie des équations différentielles linéaires. Le point commun étant les matrices de Jordan $J_{k,\rho} = \rho I_k + J_k$ (où ρ est un nombre complexe et J_k est la matrice compagnon de X^k , dont on calcule les puissances $(J_{k,\rho})^m$ dans le cas des suites, ou l'exponentielle $\exp(tJ_{k,\rho}) = \sum_{m=0}^{k-1} \binom{k-1}{m} t^m e^{\rho t} (J_k)^m$ dans le cas des équations différentielles.

Conclusion

Une bonne moitié des candidats paraît doté de connaissances solides sur les rudiments d'algèbre linéaire : produit de matrices d'ordre 2 ou 3, valeurs propres, indépendance linéaire.

Sciences physiques

Physique I

Présentation du sujet

Le problème posé cette année aborde différentes parties du programme de première et de deuxième année (diffusion particulaire, électrostatique, mécanique des fluides, mécanique du solide, thermodynamique) par l'étude biophysique de la bactérie *Escherichia Coli*.

Les très bons candidats ont pu traiter l'ensemble du sujet sans bâcler leur rédaction et en formulant des réponses de qualité car l'épreuve était de longueur adéquate.

La rédaction en quatre parties indépendantes a permis à tous les candidats de s'exprimer et de valoriser leurs connaissances dans l'un ou l'autre des domaines du programme abordés. La difficulté des questions est variable, quoique non progressive, permettant

ainsi un étalement des notes correct.

Le sujet alterne questions qualitatives, faisant appel quelquefois à des calculs d'ordre de grandeurs ou des vérifications d'homogénéité et questions un peu plus techniques mais ne nécessitant pas de prouesses calculatoires.

C'est cependant un sujet original et très intéressant qui demandait une certaine capacité d'analyse et d'adaptation de la part des candidats. En effet, il fallait mettre en perspective des notions et savoir-faire acquis dans un cadre original, celui de la biologie cellulaire.

Analyse globale des résultats

La structure originale du sujet a cependant déstabilisé la majorité des candidats mettant en évidence un certain manque d'adaptation et de réflexion. Ceci est regrettable car ce sont des qualités essentielles au métier d'ingénieur.

Les candidats font dans l'ensemble des efforts de présentation et de rédaction que le jury a apprécié. Les vérifications d'homogénéité demandées ont été dans la majorité des cas bien menées. Ceci ne fut cependant pas le cas des applications numériques qui sont assez nombreuses. Le jury a constaté non seulement des erreurs numériques mais surtout un nombre de chiffres significatifs proposés par le candidats qui était rarement en adéquation avec les données de l'énoncé.

Le jury a noté cette année une recrudescence de raisonnements faux ou malhonnêtes visant à obtenir coûte que coûte des résultats intermédiaires donnés dans l'énoncé. Cette attitude a été lourdement sanctionnée.

Les parties II et III du sujet qui représentent environ 60 % du barème, ont été les plus abordées par les candidats mais pas forcément les mieux comprises car nécessitant une certaine capacité d'analyse. Cependant, en moyenne, 45 % des points des candidats ont été obtenus dans la partie II, 20 % dans chacune des parties I et III et enfin 15 % dans la partie IV.

Commentaires sur les réponses apportées et conseils aux candidats

Partie I - Taille critique d'une bactérie aérobique

*A-

La loi de Fick est globalement bien connue.

La majeure partie des candidats a cependant mal algébrisé le flux entrant de molécules de dioxygène par un défaut de lecture d'énoncé, ce qui fut souvent dommageable pour la suite. La justification de la conservation de ce flux par l'argument « régime stationnaire » est certes nécessaire mais pas suffisante. Il faut parler de l'absence de sources.

*B-

Des erreurs de signe ont souvent conduit à une mauvaise interprétation de la densité particulaire en surface de la bactérie en fonction de son rayon. Cette densité diminue lors d'une augmentation de la taille de la bactérie vu que celle-ci a une consommation croissante proportionnelle à sa masse.

Partie II - Propriétés électrostatiques de la membrane de la bactérie

La plus importante partie du sujet, la plus abordée par les candidats (attirait de l'électrostatique ?) mais finalement pas la mieux comprise car nécessitant analyse et capacité d'adaptation.

Beaucoup d'étudiants n'ont pas compris que le II.A était un cas d'école, et qu'au II.B, on revenait à la bactérie.

* A-1 et A-2 : Beaucoup de confusion entre les vecteurs densité de courant particulaire j_{n+} et j_{n-} de la loi de Fick, et les vecteurs densité de courant volumique électrique qui s'en déduisent j_{D+} et j_{D-} (seulement 10 % de réponses justes pour ces questions souvent très abordées et ayant des répercussions importantes pour les questions suivantes).

* A-3 : Le jury note une bonne connaissance du cours sur les équations de Maxwell. Il faut rappeler néanmoins que le potentiel électrostatique est conventionnellement choisi de manière à ce que le champ électrique associé à ce potentiel soit dirigé vers les potentiels décroissants.

* A-1 et A-6 : Un nombre non négligeable de candidats confond également densité volumique de charge (ρ) et densité volumique des charges positives ($n+$) ou négatives ($n-$). Ceci est imputable à une mauvaise lecture du sujet ou une mauvaise manipulation du vocabulaire de la part des candidats.

Les candidats devront être plus vigilants à l'avenir et connaître précisément la dénomination et la signification physique des notations qu'ils utilisent.

* A-5 : Les formules des densités volumiques étant finalement données au II-A-5 c), cela a mis en évidence la capacité de certains candidats à pouvoir sans vergogne modifier un signe ou ajouter des facteurs dimensionnés sans raison autre que celle de retrouver coûte que coûte le résultat fourni.

C'est une attitude qui fut lourdement sanctionnée par le jury car l'honnêteté scientifique est une des qualités majeures dont doit disposer le futur ingénieur.

* B-1 et B-2 : Peu de réponses correctes sur ces questions relevant essentiellement de l'analyse graphique. Certains cas s'expliquent par un signe incorrect dans la relation entre champ et potentiel électrostatique mais beaucoup de candidats ont cru que la densité volumique de charge et le potentiel électrostatique étaient reliés par la même relation qu'au II-A 6) a) alors qu'il ne s'agissait pas du

même problème physique.

* B-3 : Même si un candidat sur trois en moyenne donne l'expression correcte de la dimension caractéristique de des régions chargées, seules 3% des applications numériques sont correctes et tiennent compte du nombre de chiffres significatifs de l'énoncé.

Ce manque de soin dans les applications numériques a été constaté par l'ensemble du jury et a coûté un nombre important de points même à des candidats de qualité. Les candidats sont invités à apporter plus de soin à l'avenir au traitement de ces questions.

* C-1 : La cause réelle de l'existence d'un champ électrostatique (diffusion des ions potassium compensée ensuite par un phénomène de conduction électrique) a rarement été évoquée.

* C-2 : La résolution de l'équation différentielle est souvent bien réalisée.

Partie III - Propulsion d'un microorganisme par flagelle

Il s'agissait de comprendre les mouvements possibles de la bactérie et de son flagelle.

Peu de candidats ont compris ces mouvements et leurs conséquences sur les calculs.

* A-1 : On attendait ici la démonstration de l'égalité des deux forces de traînée par projection, dans les deux mouvements, du principe fondamental de la dynamique en régime permanent. Seuls 30 % des candidats ont eu une démarche rigoureuse sur cette question.

* A-2 : L'analyse dimensionnelle est souvent bien maîtrisée.

* A-3 : L'écriture, pourtant primordiale pour répondre rigoureusement à cette question, du vecteur vitesse comme somme d'un vecteur parallèle à l'axe du bâtonnet et d'un vecteur orthogonal à cet axe n'a que très rarement été observée.

* B-1-b : L'expression générale du nombre de Reynolds est connue mais l'argument de vitesse faible ne suffit pas à justifier un écoulement laminaire dans cette question. On attendait une application numérique claire.

* De B-2 à C-1 : L'expression de la vitesse d'un point M du flagelle lorsque la bactérie est en rotation pure et les calculs qui en découlent sont rarement justes (entre 10 et 15 % de réussite sur ces questions assez souvent abordées).

Une lecture attentive de chaque partie de problème dans son entier permet une meilleure appréhension du problème physique et une rédaction plus efficace.

C'est ce qui a dû manquer à la plupart des candidats à ce stade du sujet.

* C-3-b : L'expression de la vitesse en régime permanent s'obtient certes en négligeant la traînée sur la sphère de rayon R mais aussi en remarquant que le poids apparent est nul.

* D-3 : Rappelons qu'une puissance motrice est positive ; il fallait en tenir compte vu que le moment des forces proposé par l'énoncé est négatif.

Partie IV - Moteur rotatif biologique

Le mouvement du flagelle est ici vu comme un moteur rotatif dont on cherche à comprendre les sources énergétiques de fonctionnement (interface physique/ chimie intéressante) et à analyser le rendement (mécanique du solide).

Cette partie facile conduisait à des calculs rapides, des résultats simples et à de nombreuses applications numériques. Elle a été l'objet de beaucoup de grappillage de points, quelquefois sans grand rendement heureusement au vu du nombre de chiffres significatifs proposés dans les applications numériques par les candidats (3 voir 4 !).

* A-1 : De rares candidats confondent encore transformations réversible et isentropique.

* A-2 : L'argument « système fermé » n'est que trop rarement évoqué dans les démonstrations proposées.

* A-3 : Un travail clair sur les logarithme népérien et décimal était nécessaire pour répondre à cette question. Seulement 30 % des candidats le réalisent correctement.

* B-1 : L'analyse dimensionnelle est souvent correcte.

* B-2 : Les notions de paramètres et de variables sont souvent confondus. Le paramètre majeur est ici le rayon de la bille de latex.

* B-4 : La fréquence de rotation demandée s'obtient en considérant alors le couple nul ou faible en l'absence de bille de latex. Ceci fut rarement compris.

* C : Un moteur ne peut fournir plus d'énergie qu'il ne reçoit : le rendement est donc défini par P_m/P_r et non l'inverse. L'évolution de ce rendement en fonction de la fréquence ne pouvait se faire qu'en revenant au couple moteur.

* D : Les quelques candidats qui ont abordé ces questions l'ont fait correctement. Il fallait évidemment soigner les applications numériques.

Conclusion

Un souci de rigueur est nécessaire afin d'exercer au mieux le métier d'ingénieur (maîtrise exacte du vocabulaire employé, lecture attentive des problématiques posées, analyse, réponses numériques en adéquation avec les contraintes expérimentales). Les épreuves des concours tendent à vérifier cette rigueur au travers de sujets originaux et intéressants tel que celui de cette année. Le jury encourage donc les futurs candidats à développer leur sens critique et leur capacité d'analyse avec beaucoup de rigueur.