Mathématiques

Mathématiques I

Présentation du sujet

Le but du problème est de trouver les solutions d'une équation différentielle linéaire à coefficients constants d'ordre n, d'abord lorsqu'elle est homogène, ensuite lorsque le second membre est de la forme produit d'un polynôme par une exponentielle. Il permet de tester les connaissances des candidats en algèbre linéaire et de vérifier que certains résultats d'analyse sont bien acquis : propriété des séries entières, étude des séries de fonctions (problèmes de convergence et majorations y conduisant, dérivation des séries de fonctions), étude de l'intégrabilité d'une fonction. La recherche d'une solution particulière de l'équation avec second membre conduit à l'élaboration d'un programme pour déterminer cette solution.

Analyse globale des résultats

Les résultats ont été jugés décevants étant donné le grand nombre de questions faciles proposées. Des lacunes au niveau de la logique sont apparues dans les raisonnements par récurrence, dans l'établissement de conditions nécessaires et suffisantes, dans les questions d'existence et d'unicité de solutions. Les copies sont en général soignées et si l'orthographe laisse parfois à désirer, un effort est fait pour la présentation.

La question concernant le programme à réaliser a été presque toujours sautée.

Commentaires sur les réponses apportées et conseils aux candidats

Partie I

A. La notion d'espace vectoriel n'est pas acquise par tous ; certains cherchent la dimension d'un ensemble avant de montrer que c'est un espace vectoriel. D'autres ne savent pas ce que signifie P est divisible par X^p. Les dimensions trouvées ne sont pas toujours des entiers (l'espace $\mathbb{C}_{q,p}[X]$ est souvent doté de la dimension p/q). Le fait d'écrire que $\mathbb{C}_{q,p}[x]$ et $\mathbb{C}_q[X]$ ont la même dimension $q+1$ ne semble pas choquant à bon nombre de candidats.

B. Beaucoup ne comprennent pas la question « Montrer qu'on peut définir une application… ». L'injectivité de l'application est mal démontrée : le passage de $\forall t \in I$, $P(t)=0$ à $P=0$ est rarement justifié.

C. Beaucoup se contentent de redémontrer que l'image d'un sous-espace vectoriel par une application linéaire est un sous-espace vectoriel et négligent la question de la dimension. Dans un certain nombre de copies, la dimension du sous-espace vectoriel $\{0\}$ est 1.

Partie II

B. C'est une question qui départage les candidats. Peu pensent à écrire le polynôme A sous la forme

$$A(X)=\alpha_n\prod_{j=1}^{p}(X-r_j)^{mj}.$$

Il y a beaucoup de confusion entre Σ et Π. La manipulation des polynômes d'endomorphismes pose de gros problèmes.

Une erreur fréquente est commise :

$$y\in\sum_{j=1}^{p}E_j \Longrightarrow (\exists\, j \text{ tel que } y\in E_j)$$

ou bien

$$y\in\sum_{j=1}^{p}E_j \Longrightarrow (\forall j\in\{1,\ldots,p\}, y\in E_j).$$

C.b. La formule « par une récurrence facile, on obtient le résultat demandé » ne suffit pas. Ceux qui ont voulu faire la démonstration ont souvent fait l'erreur de considérer $(D-rId_E)\circ(D-rId_E)^k$ au lieu de $(D-rId_E)^k\circ(D-rId_E)$.

C.c. Confusion fréquente entre au plus et au moins.

D. Cette question classe les candidats : il y a ceux qui savent utiliser les questions précédentes et qui traitent correctement cette question et les autres qui pataugent dans des écritures compliquées qui ne mènent à rien.

E. Certains ont l'air d'ignorer ce qu'est une série entière. Les notions de fonctions développables en séries entières et indéfiniment dérivables sont souvent confondues. D'autres cherchent explicitement une série entière solution selon la méthode de résolution rencontrée en cours.

Partie III

A. Là encore, peu comprennent ce que signifie la phrase « vérifier que l'on peut définir une application… ». La démonstration de la linéarité est souvent longue et pénible.

B. Cette question n'a été traitée avec succès que dans les meilleures copies.

C. Cette question n'est également bien traitée que dans les meilleures copies. Beaucoup confondent existence et unicité et n'hésitent pas à écrire « si une solution existe, d'après l'injectivité de Ψ, elle est unique donc la solution existe et est unique ».

D. Ceux, peu nombreux, qui connaissaient la structure affine de l'ensemble des solutions de (L), ont traité cette question sans problème.

Partie IV

A. La question ouverte relative aux autres solutions de L_b a fait des ravages.

B. Cette question n'est traitée que par les meilleurs candidats, ceux qui ont su résoudre la question III.C. D'autres parlent de polynômes échelonnés mais cette seule évocation ne suffit pas à faire une démonstration.

C. Peu de candidats justifient clairement la formule : ils se contentent en général de donner la dérivée k-ième de Π_p (parfois avec des erreurs!) et d'écrire le résultat.

D. Moins de 2% abordent cette question.

E.a. Certains oublient les modules pour faire des majorations.

E.b. Ceux qui abordent cette question la traitent correctement.

F. Le théorème de dérivation d'une série de fonctions est en général bien énoncé mais la vérification des hypothèses est rarement correcte.

Les questions H, I, J ne sont abordées que dans les très bonnes copies.

Conclusion

L'algèbre linéaire du début en a dérouté beaucoup, qui se perdent dans des démonstrations sans fin par manque de recul sur des définitions de base. Les techniques usuelles (prouver qu'un ensemble est un sous-espace vectoriel, qu'une application est linéaire, trouver une dimension…) sont souvent mal maîtrisées. Sur les séries entières, beaucoup sont obnubilés par ce qu'ils ont fait pendant l'année scolaire et veulent le replacer à tout prix sans se soucier de la question posée, ainsi l'unicité du développement en série entière est invoquée sans raison.

Mathématiques II

Présentation du sujet

L'étude des récurrences linéaires $u_{n+1} = \lambda_1 u_n + \ldots + \lambda_k u_{n-k+1}$ (k un entier, $\lambda_1 \ldots \lambda_k$ des scalaires complexes fixés, $\lambda_k \neq 0$) conduit à étudier les puissances de la matrice compagnon associée au polynôme $P(X) = X^k - \lambda_1 X^{k-1} - \ldots - \lambda_k$. Si une racine complexe ρ de P est de multiplicité m, elle contribue à l'espace vectoriel des suites récurrentes décrit ci-dessus par les m suites (linéairement indépendantes) $(\rho^n)_{n\geq 0}, (n\rho^n)_{n\geq 0}, \ldots, (n^{m-1}\rho^n)_{n\geq 0}$.

Le problème propose d'examiner les propriétés de convergence ou de périodicité des suites récurrentes linéaires, ce qui se ramène à la même question pour les suites $(n^m\rho^n)_n$ vues plus haut. Une deuxième partie propose quelques éléments d'étude des produits de matrices $A_n \ldots A_1 A_0$, alternant des exemples et des questions plus abstraites d'engendrement et d'indépendance linéaires.

Analyse globale des résultats

La plupart des questions sont élémentaires, ne demandant que des rudiments d'algèbre linéaire. Cela explique sans doute que les correcteurs de cette épreuve n'ont pas relevé de lacune particulièrement grave et générale.

Les copies ont été assez longues. Les qualités de méthode et d'ordre ont beaucoup compté dans le résultat des candidats.

La longue Partie I a été abordée par la plupart des copies. Les différences entre les candidats ont surtout concerné le traitement de la Partie II qui a permis à un quart des candidats de se distinguer assez nettement.

Commentaires sur les réponses apportées et conseils aux candidats

I.A.3.a - Noter qu'il s'agit ici de trouver toutes les matrices inversibles Q telles que $AQ = QD$.

I.A.4.b - Même remarque que précédemment, avec la subtilité que les matrices Q dépendaient de deux paramètres dont l'un décrit $\mathbf{C}^*$ comme à la question précédente mais l'autre décrit $\mathbf{C}$ tout entier.

I.A.5 - Les candidats connaissent bien le théorème selon lequel une matrice dont le polynôme minimal est scindé et dont les racines