Mathématiques

Mathématiques I

Présentation du sujet

Le problème support de l'épreuve de Math 1 se propose de résoudre, avec les outils du programme de la filière MP un résultat classique relatif aux opérateurs compacts. Il demande aux candidats de mettre en œuvre leurs connaissances et compétences vis à vis de certains chapitres du programme soit par le biais de questions de cours, soit par leur utilisation pour résoudre les questions posées.

Analyse globale des résultats

Les résultats enregistrés sont assez décevants dans l'ensemble même si l'on trouve quelques copies remarquables. De façon générale, les questions de cours ne sont pas parfaitement connues et de nombreux candidats ne semblent pas savoir qu'un théorème possède des hypothèses. Les notions de base ne sont pas toujours maîtrisées et les raisonnements présentés restent souvent relativement flous. De façon générale, la rédaction, quand elle existe, n'est pas soignée, l'orthographe - en particulier celle des mots usuels du vocabulaire mathématique - n'est pas correcte et la présentation matérielle ne semble pas être la préoccupation majeure de certains candidats. Quelques efforts dans ces domaines seraient à fournir pour améliorer la qualité des travaux présentés.

Commentaires sur les réponses apportées et conseils aux candidats

Partie I

A.1. De façon générale, le théorème de CAUCHY-LIPSCHITZ n'est pas maîtrisé ; il y a une confusion entre les problèmes $y' = F(x,y)$ et $y'' = F(x,y)$, et le cas particulier des équations différentielles linéaires ; les hypothèses ne sont pas clairement formulées ; de très nombreux candidats pensant que dans le cas étudié, la seule hypothèse donnée de $y(0)$ suffit pour conclure, ce qui les conduit à escamoter l'équivalence demandée entre le fait qu'une solution y est impaire et le fait que $y(0) = 0$.

A.2. Le wronskien n'est pas toujours connu et l'on lit fréquemment « qu'il est toujours nul ou jamais nul ». De plus, on se rend compte ici que certains candidats lisent fort mal l'énoncé : ils oublient que l'on recherche les vecteurs propres dans l'espace vectoriel des fonctions impaires.

B.1. Le résultat le plus calamiteux est la résolution de l'équation différentielle à coefficients constants $y'' + \alpha y = 0$, α appartenant à $\mathbb{R}$. Dans les cas où cette équation différentielle est bien résolue, on affirme sans démonstration que les solutions $t \mapsto sh\,(\mu t)$, $\mu \neq 0$ ne sont pas 2π-périodiques, que les fonctions $t \mapsto \sin\left(\sqrt{\lambda - a}\,t\right)$ sont 2π-périodiques si, et seulement si, $\lambda = a + k^2$ avec $k \in \mathbb{N}^\star$ et la plupart du temps il apparaît que les fonctions constantes ne sont pas périodiques.

Partie II

A.1. Le fait que V_n soit un sous-espace vectoriel de dimension finie n'est pratiquement jamais évoqué pour justifier l'existence de Π_n. De plus, un minimum de réflexion pouvait éviter des erreurs grossières comme par exemple « l'égalité » relevée dans de nombreuses copies : $\lim\limits_{n\to\infty} \| \Pi_n f \|_2 = f$.

A.3. Peu de candidats réalisent que pour toute fonction appartenant à V_n, $\Pi_n f = f$ et du coup, les questions faciles (A.2.)(A.3.) et (B.2.) donnent lieu à des calculs compliqués voire inexistants.

B.2. Pour beaucoup de candidats le fait que $V_k \cap \mathrm{Vect}(e_{k,n}, \dots e_{n,n})$ soit non vide suffit pour affirmer que cette intersection contient un vecteur unitaire. Il convient cependant de noter que quelques candidats ont pensé à utiliser la formule de GRASSMANN pour établir ce point, ce qui les a conduit à résoudre entièrement cette question. Enfin, compte tenu de ce que nous avons pu lire, il convient de rappeler aux futurs candidats que le complémentaire d'un sous-espace vectoriel dans un espace vectoriel, n'est pas un sous-espace vectoriel.

Partie III

A.1. De façon générale, les candidats n'ont pas su utiliser le théorème de CAUCHY-LIPSCHITZ pour montrer que la fonction r_λ n'est pas a valeurs strictement positives. Le théorème du relèvement est rarement évoqué et le théorème de CAUCHY-LIPSCHITZ n'est pratiquement jamais énoncé correctement pour résoudre l'équation (T_λ).

B. Beaucoup de maladresses sont relevées dans l'obtention des inégalités demandées dans la question (B.1.) et la question (B.2.) n'est pratiquement jamais traitée de façon correcte, beaucoup trop de candidats pensant que $\dfrac{1}{\lambda}$ et $\dfrac{1}{\sqrt{\lambda}}$ sont du même ordre quand $\lambda \to +\infty$. Il convient quand même de souligner que pour quelques candidats, la fonction q considérée était de classe $\mathcal{C}^1$ ce qui, grâce à une intégration par parties, leur a permis d'avoir

$$\lim_{\lambda\to\infty}\int_0^{2\pi} q(t)\cos(2\sqrt{\lambda}\,t)dt = 0$$

C. Très peu de candidats remarquent que les fonctions $x \mapsto -\theta(\lambda, -x)$ et $x \mapsto \theta(\lambda, x+2\pi) - 2k\pi$ sont solutions de (T_λ) pour obtenir les égalités demandées.

Partie IV

Cette partie a été abordée par de nombreux candidats par le biais des questions (A.1.) qui ont été traitées avec des fortunes diverses. À partir de là, à l'exception de la question (A.2.b.), le reste n'a pas été traité sauf dans quelques copies exceptionnelles.

Partie V

Cette dernière partie, abordée par presque tous les candidats, n'a pratiquement pas rapporté aucun point vu le traitement infligé par exemple à la double inégalité

$$a < \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} q(t)dt < b.$$

Ici, les manipulations effectuées montrent que malheureusement beaucoup de candidats ne maîtrisent pas un énoncé aussi simple que celui qui est sous-jacent à la demande du texte.

Conclusion

Pour terminer, on peut donc conseiller aux futurs candidats de lire attentivement le sujet qui leur est proposé en retenant tout au long de l'épreuve les hypothèses et les propriétés mises en jeu dans l'énoncé - ici, on aurait pu éviter des déconvenues si l'on n'oubliait pas que E_2 est le sous-espace vectoriel des fonctions 2π-périodiques impaires de classe $\mathcal{C}^2$ - de connaître et comprendre les notions de base ainsi que les énoncés importants, de maîtriser les divers outils, de savoir conduire un calcul, de mettre en place des stratégies simples permettant de répondre à une question. Cela, joint à des considérations matérielles rappelées plus haut, devrait permettre de répondre de façon satisfaisante aux diverses exigences présentées par un problème.

Mathématiques II

Présentation du sujet

Le sujet est consacré à la décomposition LU des matrices carrées. Cette décomposition a de nombreuses applications, principalement en algorithmique matricielle puisqu'elle ramène la résolution d'un système de CRAMER à deux résolutions successives de systèmes de CRAMER triangulaires, mais elle a aussi des applications théoriques : on peut entre autres en déduire l'existence de la décomposition de CHOLESKY d'une matrice symétrique réelle définie positive ainsi que de nombreux calculs de déterminants, tels celui dont le terme général est PGCD*(i, j)*.

L'existence de cette décomposition n'est pas automatique, mais elle est *génériquement* vérifiée pour une matrice carrée inversible (plus précisément, l'ensemble des matrices réelles possédant une décomposition LU est un ouvert dense dans $GL_n(\mathbf{R})$. Elle est en outre *unique* pourvu que l'on impose par exemple à la matrice L d'être *unipotente*.

Une condition nécessaire et suffisante d'existence de la décomposition est la non-nullité des déterminants mineurs emboîtés. Lorsqu'elle est satisfaite, la détermination effective des matrices L et U revient en fait à la méthode du pivot de Gauss, avec la propriété supplémentaire que les pivots se trouvent tous sur la diagonale.

Analyse globale des résultats

Le niveau des copies s'est révélé extrêmement disparate : dans certaines, on trouve la preuve de la maîtrise que l'on est en droit d'attendre de candidats confrontés à des questions dans l'ensemble élémentaires ; dans beaucoup d'autres, on trouve au contraire les marques d'une souffrance constante, conséquence d'un manque évident de recul.

Cette lacune se constate à tous les niveaux du problème ; à titre d'exemple, peu de candidats ont su traiter en un minimum de calculs le **II.C1** qui ne demandait après tout que de reconstituer la matrice d'une forme quadratique dont une expression « analytique » était donnée. En d'autres termes, il était permis, voire conseillé, de démontrer que B=A pour établir que A=B.